

GEDANKEN

Korrespondenzen und Polynome

Parametrisierte Familien Es sei

$$k[x_i, t_j] \ni F_a(x_i, t_j) \text{ und } F \subseteq \mathbb{A}_x^m \times_k \mathbb{A}_t^n = X \times_k T = \text{Spec}(k[x_i, t_j])$$

ein System von Polynomen und ein dadurch gegebenes abgeschlossenes Unterschema $F = V(F_a)$. Die t_i seien erstmal als Parameter zu denken.

Wir suchen eine Zerlegung von

$$T = \sqcup T_\alpha$$

so daß genau auf jedem T_α eine Gleichartigkeit der Fasern

$$F_t = V(F_a)_t$$

für $t \in T_\alpha$ herrscht.

Im Idealfall wünschen wir uns, daß die T_α *semialgebraische Mengen* oder *konstruierbare Mengen* sind.

Eigenschaften Eigenschaften, nach denen man stratifizieren könnte, gibt es genug:

1. F_t isomorph zu $F_{t'}$ für $t, t' \in T_\alpha$ im Sinne von
 - a) Isomorphie als k -Varietäten
 - b) Isomorphie als k -Varietäten.
 - c) Birationale Isomorphie.
 - d) Isomorphie als analytische Varietäten.
 - e) Isomorphie als topologische Räume
 - f) Isomorphie als homotope Räume.
 2. F_t hat genau k Urbilder für $t \in T_k$ (evtl. als Länge von F_t gezählt.)
 3. F_t hat genau k irreduzible Komponenten für $t \in T_k$.
 4. F_t hat Dimension k für $t \in T_k$.
 5. F_t ist flach über T_α für $t \in T_\alpha$ (genauer: $F_{T_\alpha} = V(F_a)_{T_\alpha}$ ist flach über T_α).
 6. F_t hat innerhalb von $t \in T_\alpha$ „dieselben Primäridealtypen“ (was heißt das überhaupt, bei $f(x_1, \dots, x_m, t) = 0$, einer Hyperfläche ist es klar, allgemeiner müßte man es erst definieren).
 7. F_t hat innerhalb von $t \in T_\alpha$ „dieselben Singularitäten“. Hier ist noch weniger klar, was das überhaupt heißen mag. Ein Ansatz 0-ter Ordnung wäre: „Ist nicht-singulär“ vs. „Ist singulär“
 8. Für $t, t' \in T_\alpha$, infinitesimal benachbart, ist F_t immer in $F_{t'}$ deformierbar.
- Man muss hier immer die Fälle diskreter Moduli (endlich oder abzählbar viele Klassen T_α) oder kontinuierlicher Moduli (endlich viele $G_a \in k[t_j, u_s]$ und endlich viele $H_b(u_s) \in k[u_s]$ wobei die u_s „implizite Invarianten“ für die t_j sind) unterscheiden.

Kubische Kurven Ein Beispiel für kontinuierliche Invarianten wäre etwa

$$F(x, y, a, b) = y^2 - (x^3 + ax + b) = 0$$

als unsere Funktion $F = 0$, dabei sind x, y die x_i und a, b die t_j . Der Modulraum $k[t_j, u_s]$ ist $k[a, b, j]$ mit der Funktion $G(a, b, j) = j(4a^3 + 27b^2) - 17284a^3$ (Funktionen $H_b(u_s)$ gibt es hier nicht).

Man muss den Raum $k[a, b]$ aber noch zerlegen in $T_1 = (4a^3 + 27b^2) \neq 0$ (elliptische Kurven) und $T_2 = (4a^3 + 27b^2) = 0, a \neq 0$ (nodale Kurven) und $T_3 = (4a^3 + 27b^2) = a = 0$ (cuspidale Kurven). Der Modulraum $k[a, b, j, G)$ unterteilt dann nur den Teilraum T_1 weiter.

Ein hypothetischer Algorithmus sollte die Aufteilung von T in T_1, T_2, T_3 selbständig finden und auch den Modulraum $k[a, b, j]$ für T_1 mit der impliziten Invariante $G(a, b, j)$.

Kodaira-Spencer Wenn, etwas allgemeiner $V(F_a) = F \subseteq \mathbb{P}_{k[t_j]}^m$ projektiv über T ist, also die $F_a(x_i, t_j)$ homogen in den x_i , so hat man eine Kodaira-Spencer-Abbildung

$$K_t : T_t \rightarrow H^1(F_t, \mathcal{T}_{F_t}) = T_{F_t}(\mathcal{M})$$

wobei $\mathcal{M}$ der Modulraum der F_t ist.

Für jede algebraische Invariante $u_s(t_j)$, die von $T \rightarrow \mathcal{M}$ herkommt ist

$$\ker du_s(t_j)_t \supseteq \ker K_t.$$

Das System der linearen Unterräume $\ker K_t$ definiert ein System linearer PDEs auf (t_j) deren Lösungen die algebraischen Invarianten $u_s(t_j)$ sind, die wir oben gesucht haben.

Kodaira-Spencer Beispiel Es sei $T = \text{Spec}(k[a, b]) = \text{Spec}(A)$ und $P = \mathbb{P}_T^2$ mit $P = \text{proj}(A[X, Y, Z])$ und weiter $X = V(F) \subseteq P$ mit $F = F(a, b, X, Y, Z)$, zum Beispiel

$$F = Y^2 Z - (X^3 + aXZ^2 + bZ^3)$$

Wir haben die Sequenz

$$0 \rightarrow \pi^* \Omega_T \rightarrow \Omega_X \rightarrow \Omega_{X|T} \rightarrow 0$$

und die Dualisierung $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_X)$

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{T}_{X|T} \rightarrow \mathcal{T}_X \rightarrow \pi^* \mathcal{T}_T \rightarrow 0$$

Das Diagramm für die Faser bei $t \in T$ ist

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{j} & X_t \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ T & \xleftarrow{i} & t \end{array}$$

Wenden wir $j^*(-)$ auf die Sequenz (1) an, so entsteht

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_{X_t|t} \rightarrow \mathcal{T}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_t} \rightarrow \mathcal{T}_{T,t} \otimes \mathcal{O}_{X_t} \rightarrow 0$$

Die lange exakte Sequenz liefert

$$(2) \quad H^0(\mathcal{T}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_t}) \xrightarrow{\psi_t} \mathcal{T}_{T,t} \otimes H^0(\mathcal{O}_{X_t}) \xrightarrow{K_t} H^1(\mathcal{T}_{X_t|t})$$

wobei K_t die Kodaira-Spencer-Abbildung ist und ψ eine Surjektion auf $\ker K_t$ liefert.

Wollen wir also $\ker K_t$ als $\text{im } \psi_t$ ermitteln, müssen wir $\mathcal{T}_X$ explizit beschreiben: Es ist zunächst

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{T}_X \rightarrow \mathcal{T}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_X \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_X)$$

wobei $\mathcal{I}$ die Idealgarbe $F \mathcal{O}_P$ ist.

Es ist weiter $P = T \times_k \mathbb{P}_k^2$ und damit

$$(4) \quad \Omega_P = \pi_1^* \Omega_T \oplus \pi_2^* \Omega_{\mathbb{P}_k^2}$$

Mit der Eulersequenz $0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^3 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow 0$ und ihrer Dualisierung erhalten wir

$$(5) \quad \mathcal{T}_P = \pi_1^* \mathcal{T}_T \oplus \pi_2^* \mathcal{T}_{\mathbb{P}_k^2} = \mathcal{O}_P \partial_a + \mathcal{O}_P \partial_b + (\mathcal{O}_P(1) \partial_X + \mathcal{O}_P(1) \partial_Y + \mathcal{O}_P(1) \partial_Z) / \mathcal{O}_P(X \partial_X + Y \partial_Y + Z \partial_Z)$$

Mit dieser Darstellung als explizite Vektorfelder erhält man für $H^0(\mathcal{T}_X)$ aus der Sequenz (3) die Darstellung als Kern der Abbildung

$$(6) \quad v \in H^0(\mathcal{T}_P \otimes \mathcal{O}_X) \mapsto v \vdash F$$

und wir haben konkret

$$(7) \quad \mathcal{T}_P \otimes \mathcal{O}_X = (\mathcal{O}_X \partial_a + \mathcal{O}_X \partial_b + \mathcal{O}_X(1) \partial_X + \mathcal{O}_X(1) \partial_Y + \mathcal{O}_X(1) \partial_Z) / \mathcal{O}_X(X \partial_X + Y \partial_Y + Z \partial_Z)$$

Man kann dies als

$$(8) \quad 0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{T}_P \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

schreiben und dann das Diagramm aus (3)

$$(9) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & H_{\geq 0}^0(\mathcal{W}) / H_{\geq 0}^0(\mathcal{L}) & \xrightarrow{v \vdash F} & H_{\geq 0}^0(\mathcal{O}_X(d)) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow = \\ 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & H_{\geq 0}^0(\mathcal{W}) & \xrightarrow{v \vdash F} & H_{\geq 0}^0(\mathcal{O}_X(d)) \end{array}$$

betrachten. Es ist dann $\tilde{K} = \mathcal{T}_X$ und $(K_0^{\text{sat}}) = H^0(\mathcal{T}_X)$.

Die Projektionen von K_0 und K'_0 auf $A \partial_a + A \partial_b$ sind identisch, sodaß wir anstelle K_0 zu bestimmen auch das einfachere K'_0 verwenden können, wo keine Quotientenbildung vorkommt.

Aus der Sequenz

$$(10) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_P(-d+e) \xrightarrow{F} \mathcal{O}_P(e) \rightarrow \mathcal{O}_X(e) \rightarrow 0$$

erhalten wir hier mit $d = 3$ und $e = 0, 1$ die Gleichheiten

$$(11) \quad H^0(\mathcal{O}_X) = H^0(\mathcal{O}_P) = A = k[a, b], \quad H^0(\mathcal{O}_X(1)) = H^0(\mathcal{O}_P(1)) = XA + YA + ZA$$

Damit sind die Vektorfelder $v \in H^0(\mathcal{W})$ in immer von der Form

$$(12) \quad v = A \partial_a + A \partial_b + (AX + AY + AZ) \partial_X + (AX + AY + AZ) \partial_Y + (AX + AY + AZ) \partial_Z$$

oder mit Funktionen geschrieben

$$(13) \quad v = w_a(a, b) \partial_a + w_b(a, b) \partial_b + w_X(a, b; X, Y, Z) \partial_X + w_Y(a, b; X, Y, Z) \partial_Y + w_Z(a, b; X, Y, Z) \partial_Z$$

wobei die w_X, w_Y, w_Z linear und homogen vom Grad 1 in X, Y, Z sind.

Diese Elemente v die angewandt auf F dieses annullieren, also $v \vdash F = 0$ ergeben, sind, projiziert auf $A \partial_a + A \partial_b = \mathcal{T}_T$ gerade die Kerne der Kodaira-Spencer-Abbildungen K_t .

Wir erhalten diese w_a, w_b also als Teile der Lösung des Systems linearer PDE

$$(14) \quad v \vdash F = 0$$

$$(15) \quad (w_a)_X, (w_a)_Y, (w_a)_Z = 0$$

$$(16) \quad (w_b)_X, (w_b)_Y, (w_b)_Z = 0$$

$$(17) \quad w_X = X w_X^X(a, b) + Y w_X^Y(a, b) + Z w_X^Z(a, b)$$

$$(18) \quad w_Y = X w_Y^X(a, b) + Y w_Y^Y(a, b) + Z w_Y^Z(a, b)$$

$$(19) \quad w_Z = X w_Z^X(a, b) + Y w_Z^Y(a, b) + Z w_Z^Z(a, b)$$

$$(20) \quad (w_X^X)_X, (w_X^X)_Y, (w_X^X)_Z = 0$$

$$(21) \quad \dots$$

$$(22) \quad (w_Z^Z)_X, (w_Z^Z)_Y, (w_Z^Z)_Z = 0$$

Man kann dieses System zum Beispiel mit einem Computeralgebrasystem zu lösen versuchen, das System *Maple* findet im Beispiel die gewünschte Lösung, Gleichung (23).

Man braucht hier natürlich eigentlich kein System von LPDE lösen, man setzt einfach alle $w_a, w_b, w_X^X, \dots, w_Z^Z$ als Funktionen von a, b an und berechnet in $v \vdash F = 0$ alle Koeffizienten $c_{ijk}(a, b)$ von $X^i Y^j Z^k$. Sie bilden ein System von Syzygiengleichungen für die $w_a, w_b, w_X^X, \dots, w_Z^Z$, das man mit üblichen Gröbnerbasismethoden lösen kann.

Man erhält (auf die eine oder andere Weise):

$$(23) \quad (w_a \partial_a + w_b \partial_b) G = 2a \partial_a G + 3b \partial_b G = 0$$

als Bedingung für eine Invariante $G = G(a, b)$. Die allgemeine Lösung dieser Bedingungsgleichung ist

$$(24) \quad G(a, b) = g\left(-\frac{b}{a^{3/2}}\right)$$

und in der Tat ist die bekannte j -Invariante $j = 6912 \frac{a^3}{4a^3 + 27b^2}$ rational durch die Invariante b^2/a^3 ausdrückbar.

Kodaira-Spencer allgemein Im allgemeinen ist $X \subseteq \mathbb{P}_T^n = P$ mit $T = \text{Spec}(k[t_j]) = \text{Spec}(A)$ und $X = V(F_a(X_i, t_j))$ mit $a = 1, \dots, s$. Es ist dann

$$(25) \quad S = A[X_0, \dots, X_n], \quad I = (F_1, \dots, F_s), \quad R = S/I$$

und

$$(26) \quad P = \text{proj}(S), \quad X = \text{proj}(R).$$

Der Korrektheit halber nehmen wir an, daß X nichtsingulär ist, damit die Sequenz

$$(27) \quad 0 \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \rightarrow \Omega_{P|k} \otimes \Omega_X \rightarrow \Omega_{X|k} \rightarrow 0$$

eine exakte Garbensequenz ist.

Wir benutzen wieder die Sequenz (1), die uns jetzt zwingt, in (3) den Ausdruck $H^0(\mathcal{T}_X)$ zu berechnen.

Wir schreiben daher (3) als

$$(28) \quad 0 \rightarrow N \rightarrow \left(\sum_j R \partial_{t_j} + \sum_i R(1) \partial_{X_i} \right) / R \left(\sum_i X_i \partial_{X_i} \right) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}(I/I^2, R)$$

und beachten, daß unter Anwendung von $\widetilde{(-)}$, der Garbifizierung, man die Sequenz (3) zurückerhält. Insbesondere ist für

$$D_P = \left(\sum_j R \partial_{t_j} + \sum_i R(1) \partial_{X_i} \right) / R \left(\sum_i X_i \partial_{X_i} \right)$$

immer $\tilde{D}_P = \mathcal{T}_P \otimes \mathcal{O}_X$.

Nun ist $\phi : M = \sum_v R(-d_v) e_v \rightarrow I/I^2$ mit $\phi(e_v) = F_v + I^2$ und $d_v = \deg_X F_v$ eine Surjektion, so daß wir (28) auch umschreiben können als

$$(29) \quad 0 \rightarrow N \rightarrow \left(\sum_j R \partial_{t_j} + \sum_i R(1) \partial_{X_i} \right) / R \left(\sum_i X_i \partial_{X_i} \right) \xrightarrow{\delta'} \text{Hom}(M, R)$$

wobei

$$(30) \quad \delta'(\partial_{t_j}) \vdash \phi(e_v) = \partial_{t_j} F_v$$

$$(31) \quad \delta'(\partial_{X_i}) \vdash \phi(e_v) = \partial_{X_i} F_v$$

ist.

Damit haben wir alle Terme und Abbildungen in der Sequenz (29) geklärt und können mit den üblichen Techniken wie sie Macaulay2 bereitstellt $H^0(\text{sheaf}(-))$ auf die Modulsequenz (29) anwenden und $H^0(T_X)$ explizit als Untermodul N von

$$(32) \quad T_P = H^0(\tilde{D}_P)$$

erhalten.

Anschließend projizieren wir dann die Erzeuger von T_P , die im Kern von δ' liegen einfach auf $H^0(\sum_j R \partial_{t_j})$ wie wir es auch im Spezialfall einer einzigen Hyperfläche getan haben.

Um dies rechnerisch umzusetzen, also vor allem $H^0(\tilde{N})$ und die Projektion auf A^m zu berechnen, benutzen wir die Beziehung

$$(33) \quad \text{Hom}_R(B^q, N)_0 = H^0(X, \tilde{N})$$

mit dem irrelevanten Ideal von R , also $B = (X_0, \dots, X_n) \subseteq R$

Wir führen die Abbildung $p_N : N \rightarrow R^m = R \partial_{t_1} + \dots + R \partial_{t_m}$, die Abbildung auf die ersten m Komponenten, den Raum in dem die gesuchten Vektorfelder leben, ein und wenden auf sie den Funktor $\text{Hom}_R(B^q, -)$ an und erhalten $p_H : \text{Hom}_R(B^q, N) \rightarrow \text{Hom}_R(B^q, R^m)$.

Es sei dann $G = \text{Hom}_R(B^q, N)_0$ ein System von A -Erzeugern der 0-Komponente mit der Projektionsabbildung $p_G : G \rightarrow \text{Hom}_R(B^q, N)$.

Weiter sei $i : B^q \rightarrow R$ die Inklusion und $\eta : \text{Hom}_R(R, R^m) \rightarrow \text{Hom}_R(B^q, R^m)$ die Anwendung von $\text{Hom}_R(-, R^m)$ auf i .

Alles zusammen haben wir das Diagramm

$$(34) \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(R, R^m) & \xrightarrow{\eta} & \text{Hom}_R(B^q, R^m) \\ u \uparrow & \nearrow w & \uparrow p_H \\ G & \xrightarrow{p_G} & \text{Hom}_R(B^q, N) \end{array}$$

Die Abbildung u gibt uns die Erzeuger der gesuchten Vektorfelder in $A^m = A \partial_{t_1} + \dots + A \partial_{t_m}$, die letztlich von $H^0(P, \tilde{N}) = H^0(P, \mathcal{T}_X)$ herkommen.

Anwendungen Hätte man einen Algrithmus, der einem solche Stratifizierungen auswirft, könnte man vieles entscheiden:

1. Ist $F_a(x_i, y_j) = 0$ der Graph eines Morphismus von $X' \subseteq X$ nach $Y' \subseteq Y$?
2. Ist $F_a(x_i, y_j) = 0$ ein Isomorphismus von $X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$?

Im Fall 1. überprüft man ob X' in einem Flachheitsstratum liegt, also $F_{X'}$ flach über X' ist und ob X' im Stratum aller nulldimensionalen Fasern der Länge 1 liegt.

Im Fall 2. wendet man die Kriterien von 1. auch „rückwärts“ an.

Damit müßte man dann sehen können, daß $t^2 - u, t^3 - v$ keinen Isomorphismus zwischen $\mathbb{A}_t^1$ und $V(u^3 - v^2) \subseteq \mathbb{A}_{u,v}^2$ stiftet.

Weitere Träume

Ein Buch mit dem Titel „Von der Buchstabenrechnung zur Gröbnerbasis“ in der die gesamte algebraische Geometrie auf Polynome $F(x_i, y_j, \dots, z_k) = 0$ zurückgeführt wird („Buchstabenrechnung“) und alle algebraischen „Prädikate“ als Ergebnisse von algorithmischen Rechnungen (im Kern immer Gröbnerbasen) auftreten. Eliminationstermordnungen und Quantifier-Elimination spielen eine große Rolle.

Ein Vektorbündel ist ein System (x_i, t_j) mit $F_a(x_i) = 0$, eine Abbildung von Vektorbündeln ein System (x_i, t_j, y_k, u_k) mit $G_b(x_i, t_j, y_k, u_k) = 0$, das in t_j und u_k linear ist. Projektive Schemata werden durch $F_a(x_i, y_j, z_k) = 0$ dargestellt, die in jeder Gruppe x_i, y_j, z_k homogen sind.

Statt Komplettierungen kommen Potenzreihenentwicklungen zum Einsatz. Wie weit mag man mit alldem wohl kommen? „It's a long long way to Tipperary...“.