Überlagerungen von algebraischen Kurven über der projektiven Gerade $\mathbb{P}^1_k$

Jürgen Böhm [*]

15. Januar 2025

1 Einleitung

Es sei $f : C \to \mathbb{P}^1$ eine Überlagerung Riemannscher Flächen, die über den Punkten $P_i \in \mathbb{P}^1$ verzweigt sei, mit den Verzweigungspunkten $Q_{i\nu} \in C$ und den Verzweigungsindizes $e_{\imath\nu}$ bei $Q_{i\nu}$.

Über $0, \infty \in \mathbb{P}^1$ finde keine Verzweigung statt, stattdessen liege $P_1, \ldots, P_n \in C$ über 0 und $Q_1, \ldots, Q_n \in C$ über ∞.

Die Überlagerung ist also vom Grad n und wir notieren die Hurwitzformel

$$2g - 2 = n(2 \cdot 0 - 2) + \sum(e_{i\nu} - 1) = -2n + \sum(e_{i\nu} - 1) \tag{1}$$

also auch

$$g = 1 - n + \frac{1}{2}\sum(e_{i\nu} - 1) \tag{2}$$

so dass das Geschlecht g von C eindeutig festgelegt ist.

Nach dem Riemannschen Existenzsatz gibt es nach Festlegung dieser Verzweigungsdaten nur endlich viele mögliche C. Wir wollen für sie explizite Gleichungen bestimmen.

Weiterhin sehen wir im Nachgang, daß wir dann auch ein Polynom

$$f(z, y) = 0$$

bestimmen können, so daß $C' = V(f(z, y)) \subseteq \mathbb{A}^2$ ein offener affiner Teil von C ist und die Überlagerung $\pi : C'(z, y) \to \mathbb{A}^1(z)$ die oben genannten Verzweigungen über $P_i \in \mathbb{A}^1(x)$ aufweist. Damit ist dann eine effektive Version des Riemannschen Existenzsatzes gefunden.

Siehe auch Bilu u. Strambi [2010].

2 Problemstellung

Wir nehmen an, daß C eine projektive Kurve im projektiven Raum $\mathbb{P}^p$ mit den homogenen Koordinaten $X_0, \ldots, X_p$ und den affinen Koordinaten $x_1, \ldots, x_p$ ist, wobei $x_\nu = X_\nu / X_0$ ist.

Die Kurve C sei als vollständiger Durchschnitt gegeben durch $p - 1$ Polynome

$$F_\alpha(X_0, \ldots, X_p) = 0,$$

die wir als

$$F_\alpha(x_1, \ldots, x_p) = 0$$

affin angeben.

[*] juergen.boehm@aviduratas.de

Wir nehmen an, daß die F_α mit unbestimmten Koeffizienten $a_{\alpha,i}$ geschrieben sind, die so durch, hier nicht genannte, Relationen verknüpft sind, daß effektiv $3g-3$ Freiheitsgrade in den $a_{\alpha,i}$ verbleiben und die F_α damit einen Teil des Modulraums $\mathfrak{M}_g$ parametrisieren.

Wir stellen uns vor, daß der ganze Modulraum durch endlich viele solche Systeme $(F_\alpha = 0)$ beschrieben werden kann.

In der Tat ist dies möglich (Petris Theorem, Mumford [1975][p. 17]) wenn man darauf verzichtet, daß die Anzahl der F_α gleich $p-1$ und die Darstellung ein vollständiger Durchschnitt sei.

Unsere im folgenden dargelegte Methode führt auch im Fall, daß die $F_\alpha = 0$ keinen vollständigen Durchschnitt beschreiben zu einem Ergebnis, allerdings ist das Aufgehen der Konstantenzählung dann nicht mehr klar ersichtlich.

Unsere Aufgabe wird es also sein, den unbestimmten Koeffizienten $a_{\alpha i}$ Werte zu erteilen, so daß $C = V(F_\alpha)(x_\nu) \to \mathbb{P}^1(z)$ den vorgegebenen Verzweigungsdaten entspricht.

3 Lösung

Wir lösen die Aufgabe, indem wir ein System von polynomiellen Relationen aufstellen, das als unbestimmte Variablen unter anderem die $a_{\alpha i}$ enthält, und dessen Lösungen immer existieren und eine passende Überlagerung $C \to \mathbb{P}^1$ beschreiben.

Aus Gründen der besseren Verständlichkeit werden wir den ersten Schritt der Lösung auf zwei verschiedene Arten angehen: Zunächst so, daß die Konstantenzählung offensichtlich aufgeht, dann so, daß ein Überschuss an freien Konstanten bleibt, aber eine explizite Angabe der auftretenden Polynomfunktionen möglich ist.

3.1 Darstellung von z

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die Angabe einer rationalen Funktion $z \in K(C)$, die wir zunächst als

$$z = \frac{\sum_{\alpha=1}^{n+1} c_\alpha w_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{n+1} d_\alpha w_\alpha} = \frac{f}{g}$$

schreiben, wobei $w_1, \ldots, w_{n+1}$ bestimmte Funktionen $w_i \in K(C)$, also bestimmte rationale Funktionen $w_i(x_1, \ldots, x_p)$ sind.

Diese Funktion z soll also unsere Projektion $C(x_\nu) \to \mathbb{P}^1(z)$ liefern.

Die w_α sind die Basiselemente des Linearsystems

$$\Gamma(C, \mathcal{O}_C(mP))$$

für einen Nicht-Weierstraßpunkt $P \in C$, den wir nicht explizit bestimmen müssen. Da P Nicht-Weierstraßpunkt, ist die Vektorraumdimension

$$l(mP) = m + 1 - g$$

Wir setzen $m = n + g$ und erhalten $l(mP) = n + 1$. Die rationalen Funktionen $w_1, \ldots, w_{n+1} \in K(C)$ mit $(w_\alpha) + mP \geqslant 0$, also höchstens einem Pol von höchstens der Ordnung m in P sind dann unsere gesuchten w_α.

In der Einleitung hatten wir gefordert, daß über $0 \in \mathbb{P}^1(z)$ die Punkte $P_1, \ldots, P_n \in C$ und über $\infty \in \mathbb{P}^1(z)$ die Punkte $Q_1, \ldots, Q_n \in C$ liegen sollen.

Wir haben also die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(P_1) = \cdots = f(P_n) = 0 \\ g(Q_1) = \cdots = g(Q_n) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Da f,g beide einen Pol der Ordnung $m = n+g$ in P haben, müssen zu den P_i resp. Q_i noch weitere Nullstellen $B_1, \dots, B_g \in C$ treten, die f und g gemeinsam haben, also

$$\begin{aligned} f(B_1) = \cdots = g(B_g) = 0 \\ g(B_1) = \cdots = g(B_g) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Wir haben also jetzt die unbestimmten Punkte

$$P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n, B_1, \dots, B_g \in C$$

die durch die unbestimmten Koordinaten

$$x_\nu(P_1), \dots, x_\nu(P_n), x_\nu(Q_1), \dots, x_\nu(Q_n), x_\nu(B_1), \dots, x_\nu(B_g)$$

festgelegt sind und über diese und den Ausdruck der $w_\alpha = w_\alpha(x_\nu)$ in die Gleichungen (3) und (4) eingehen.

Da die $P_i, Q_j, B_l \in C$ auf der Kurve C liegen, die durch $F_\alpha(x_\nu) = 0$ gegeben ist, treten noch die Gleichungen

$$\begin{aligned} F_\alpha(x_\nu(P_i)) = 0 \\ F_\alpha(x_\nu(Q_j)) = 0 \\ F_\alpha(x_\nu(B_l) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

hinzu.

Wir bilanzieren jetzt die freien Konstanten und die sie bindenden Gleichungen:

Konstanten:

1. c_α, d_α: Insgesamt $2(n+1)$.
2. $x_\nu(P_i), x_\nu(Q_j), x_\nu(B_l)$: Insgesamt $2np + pg$.
3. $a_{\alpha i}$: Insgesamt nach Annahme $3g-3$.

Gleichungen:

1. $f(P_i) = 0, g(Q_i) = 0$: Insgesamt $2n$.
2. $f(B_i) = g(B_i) = 0$: Insgesamt $2g$.
3. $F_\alpha(x_\nu(P_i)) = F_\alpha(x_\nu(Q_j)) = F_\alpha(x_\nu(B_l)) = 0$: insgesamt $2(p-1)n + (p-1)g$.

Insgesamt

$$2(n+1) + 2np + pg + 3g - 3$$

Konstanten und

$$2n + 2g + 2(p-1)n + (p-1)g$$

Gleichungen.

Es ist bequem hier noch eine Anzahl von Gleichungen hinzuzunehmen, die erst später begründet werden und deren Zahl gleich

$$\sum (e_{i\nu} - 1) = 2g - 2 + 2n \tag{6}$$

ist.

Damit ist die Zahl der Gleichungen

$$4n + 4g + 2(p-1)n + (p-1)g - 2 = 2(p+1)n + pg + 3g - 2$$

und die Zahl der Konstanten, anders geschrieben,

$$2(n+1) + 2np + pg + 3g - 3 = 2n(p+1) + 2 + pg + 3g - 3 = 2n(p+1) + pg + 3g - 1$$

Wir haben also eine Konstante mehr als Gleichungen, dies erklärt sich aus der Multiplikation der c_α, d_α mit einem gemeinsamen Faktor im Zähler und Nenner.

3.2 Eine allgemeinere Darstellung von z

Wir hatten oben $z = f/g$ mit $f = \sum c_\alpha w_\alpha$ und $g = \sum d_\alpha w_\alpha$ mit den Elementen w_α eines Linearsystems $\Gamma(C, \mathcal{O}_C(mP))$ geschrieben.

Es ist aber für ein allgemeines System $F_\alpha(x_\nu) = 0$ mit unbestimmten $a_{\alpha i}$ als Koeffizienten im allgemeinen nicht einfach möglich, die Ausdrücke dieser w_α als rationale Funktionen der x_ν wirklich zu bestimmen.

Wir streben deshalb an, ein $r > 0$ festzulegen, so daß über eine Beziehung

$$\Gamma(C, \mathcal{O}_C(mP)) \subseteq \Gamma(C, \mathcal{O}_C(rH)) \twoheadleftarrow \Gamma(\mathbb{P}^p, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^p}(r)) \tag{7}$$

die Elemente von $\Gamma(C, \mathcal{O}_C(mP))$ durch Bilder des leicht durch $\binom{r+p}{p}$ Monome in den x_ν ausdrückbaren $\Gamma(\mathbb{P}^p, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^p}(r))$ geschrieben werden können. Dabei ist H ein Hyperebenenschnittdivisor in C.

Es ist ja für genügend große r immer $\Gamma(C, \mathcal{O}_C(rH - mP))$ nicht leer, es existiert also ein $f \in K(C)$ mit $(f) + rH - mP \geqslant 0$, oder auch

$$rH - D = mP$$

für einen effektiven Divisor $D = S_1 + \cdots + S_a$ vom Grad $a = rd - m$ wobei d der Grad des Hyperebenendivisors H in C ist.

Aus $mP + D = rH$ folgt

$$\mathcal{O}_C(mP) \subseteq \mathcal{O}_C(mP + D) = \mathcal{O}_C(rH)$$

und daraus die gewünschte obere Beziehung (7).

Es wird dann in dieser neuen Darstellung

$$z = \frac{\sum_{\alpha=1}^N c_\alpha v_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^N d_\alpha v_\alpha} = \frac{f}{g}$$

wobei $N = \binom{r+p}{p}$ die Anzahl der Monome $x_1^{r_1} \cdot \cdots \cdot x_p^{r_p}$ vom Grad $\leqslant r$ ist und v_α diese Monome durchläuft.

Es treten in dieser Darstellung dann zu $f(P_i) = 0, g(Q_i) = 0, f(B_l) = g(B_l) = 0$ noch die $2a$ Bedingungen

$$f(S_i) = 0, g(S_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, a$$

die pa neuen Unbestimmten

$$x_\nu(S_i)$$

sowie die $(p-1)a$ Bedingungen

$$F_\alpha(x_\nu(S_i)) = 0$$

hinzu.

Die tatsächliche Anzahl der Freiheitsgrade in den neuen c_α und d_α erhöht sich von jeweils $m+1-g = n+1$ auf $rd+1-g$, also um $rd - m = \deg D = a$. Zusammen also um $2a$. Damit haben wir insgesamt $(p+1)a = 2a + (p-1)a$ Bedingungen und $(p+2)a = pa + 2a$ Freiheitsgrade. Es liegt also Erfüllbarkeit vor.

3.3 Die Erfüllungsbedingungen für die Verzweigung

Die Gleichungen, die die Erfüllung der Verzweigungsbedingungen beschreiben, lassen sich verblüffend einfach aufstellen:

Wir führen für jedes $P_i \in \mathbb{P}^1$, über dem eine Verzweigung an den $Q_{i\nu}$ mit Indizes $e_{i\nu}$ stattfindet, die Funktion

$$h = f - z(P_i)g$$

Diese Funktion hat dann bei $Q_{i\nu}$ eine Nullstelle der Ordnung $e_{i\nu}$. Dies drücken wir durch Differentiation nach einem lokalen Parameter t aus

$$\frac{d^k}{dt^k}(h)|_{Q_{i\nu}} = 0 \text{ mit } k = 0, \ldots, e_{i\nu} - 1 \tag{8}$$

Dabei entstehen Unbestimmte

$$\frac{d^k x_\nu}{dt^k}|_{Q_{i\nu}} \text{ mit } k = 0, \ldots, e_{i\nu} - 1$$

deren Anzahl also $p \sum_{i\nu} e_{i\nu}$ ist.

Aus den Gleichungen $F_\alpha(x_\nu) = 0$ ergibt sich durch Differentiation nach t

$$\frac{d^k}{dt^k} F_\alpha(x_\nu, \frac{dx_\nu^l}{dt^l})|_{Q_{i\nu}} = 0 \text{ mit } k = 0, \ldots, e_{i\nu} - 1$$

also insgesamt $(p-1)\sum_{i\nu} e_{i\nu}$ zu denen noch die $\sum_{i\nu} e_{i\nu}$ Bedingungen aus den (8) treten. Insgesamt also genauso viele Bedingungen wie neu hinzutretende Unbestimmte.

Es können aber noch zusätzlich Bedingungen an die $\frac{dx_\nu^k}{dt^k}|_{Q_{i\nu}}$ formuliert werden, die die Allgemeinheit der Differentialbedingungen nicht einschränken, sondern nur zum Ausdruck bringen, daß der Parameter t zum Beispiel als $t = x_1$ gewählt werden kann.

Wir können diese Bedingungen als

$$\frac{dx_1^k}{dt^k}|_{Q_{i\nu}} = \delta_{k1} \text{ mit } k = 1, \ldots, e_{i\nu} - 1$$

mit dem Kronecker-Delta δ_{k1} formulieren. Es sind also genau

$$\sum_{i\nu}(e_{i\nu} - 1) = 2g - 2 + 2n$$

Stück und wir haben diese schon weiter oben „verbraucht“ als wir die Freiheitsgrade, die in die Aufstellung von $z = f/g$ eingehen, untersucht haben und die Beziehung (6) notiert haben.

3.4 Korrektheit der Lösung

Eine Lösung der oben angegebenen Gleichungen ist eine Kurve C vom Geschlecht g, da die $F_\alpha = 0$ überhaupt nur solche umfassen.

Sie ist durch $z = f/g$ vom Grad n über $\mathbb{P}^1(z)$, denn in z hat f nur die Nullstellen $P_1, \ldots, P_n \in C$ nicht mit g gemeinsam und entsprechend g nur die Nullstellen $Q_1, \ldots, Q_n \in C$ nicht mit f.

Aufgrund der Hurwitzformel können deshalb neben den $e_{i\nu}$, die durch die Konstruktion bestehen, keine weiteren Verzweigungspunkte (Q, e) in $C/\mathbb{P}^1$ vorkommen.

3.5 Das Problem der Anzahl der F_α

Wir haben oben bei der Zählung der Freiheitsgrade und Bedingungen immer angenommen, daß das Ideal von C in $k[x_1, \ldots, x_p]$ von genau $p-1$ Stück F_α erzeugt wird, also C ein global vollständiger Durchschnitt ist. Im allgemeinen ist C als glatte Kurve aber nur ein *lokal vollständiger Durchschnitt*.

Das heißt, für jeden Punkt $P \in C$ ist das Ideal

$$(\square) \quad (F_\alpha)_{\mathfrak{m}_P} = (G_\beta)_{\mathfrak{m}_P}$$

mit genau $p-1$ Stück G_β aber einer Anzahl von F_α, die größer als $p-1$ sein kann (zum Beispiel den F_α aus dem oben zitierten Theorem von Petri).

Aus der Beziehung ($\Box$) können wir aber ableiten, daß es eine endliche Anzahl von $f_\gamma \in k[x_1, \ldots, x_p]$ gibt, für die $D(f_\gamma)$ die Kurve C überdecken und für die jeweils

$$(F_\alpha)_{f_\gamma} = (G_{\gamma,\beta})_{f_\gamma}$$

also

$$f_\gamma^s F_\alpha = \sum h_{\alpha,\gamma,\beta} G_{\gamma,\beta}$$

mit geeigneten $h_{\alpha,\gamma,\beta}$ und $p-1$ Stück $G_{\gamma,\beta}$. Ebenso ist

$$(\triangle) \quad f_\gamma^t G_{\gamma,\beta} = \sum q_{\gamma,\beta,\alpha} F_\alpha$$

und damit für $P \in D(f_\gamma) \subseteq C$ die Bedingung $(F_\alpha(P) = 0)$ auf $G_{\gamma,\beta}(P) = 0$ zurückgeführt.

Wir können also die Bedingungen $F_\alpha(P) = 0$ immer durch äquivalente Bedingungen $G_{\gamma,\beta}(P) = 0$ für ein geeignetes γ ersetzen. Damit sind die möglicherweise zahlreicher als $p-1$ vorkommenden Bedingungen F_α immer auf $p-1$ Bedingungen $G_{\gamma,\beta}$ zurückgeführt.

Wir haben nun aber nicht nur einfache Bedingungen der Form $F_\alpha(P) = 0$, sondern auch „Differentialbedingungen“ aus der Betrachtung der Verzweigungsstellen $Q_{i\nu}$ die durch

$$\frac{d^k}{dt^k} F(x_\nu, \frac{d^l x_\nu}{dt^l})|_{Q_{i\nu}} = 0$$

ausgedrückt werden.

Hier müssen wir die Gleichungen ($\triangle$) entsprechend mit $\frac{d}{dt}$ differenzieren und die Leibnizregel beachten

$$(\triangle_1) \quad t f_\gamma^{t-1} \frac{d}{dt} f_\gamma G_{\gamma,\beta} + f_\gamma^t \frac{d}{dt} G_{\gamma,\beta} = \sum q'_{\gamma,\beta,\alpha} F_\alpha + \sum q_{\gamma,\beta,\alpha} \frac{d}{dt} F_\alpha$$

Schon aus dieser erstmaligen Differentiation liest man, zusammen mit den Gleichungen ($\triangle$), ab, daß wenn $F_\alpha(Q_{i\nu}) = 0$ ist und auch $\frac{d}{dt} F_\alpha(Q_{i\nu}) = 0$ gilt, daß dann immer sowohl $G_{\gamma,\beta}(Q_{i\nu}) = 0$ als auch $\frac{d}{dt} G_{\gamma,\beta}(Q_{i\nu}) = 0$ gelten muss, wenn $f_\gamma(Q_{i\nu}) \neq 0$ ist.

Diese Betrachtung der ersten Ordnung der Differentiation $\frac{d}{dt}$ setzt sich dann induktiv auf die höheren $\frac{d^l}{dt^l}$ fort.

Insgesamt haben wir so eingesehen, daß wir für Verschwindungsbetrachtungen (einfacher und differentieller Art) immer das System der $F_\alpha = 0$ durch Systeme $G_{\gamma,\beta} = 0$ ersetzen können, die nur aus $p-1$ Elementen bestehen. Diese „passen“ daher dann in unsere obige Konstanten- und Bedingungszählung.

4 Zusammenfassung

5 Bewertung

Literatur

Bilu u. Strambi 2010
BILU, Yuri F. ; STRAMBI, Marco: Quantitative Riemann existence theorem over a number field. In: *Acta Arith.* 145 (2010), Nr. 4, S. 319–339. http://dx.doi.org/10.4064/aa145-4-2. – DOI 10.4064/aa145–4–2. – ISSN 0065–1036

Mumford 1975
MUMFORD, David: *Curves and their Jacobians*. Ann. Arbor: The University of Michigan Press. 104 p. $ 5.00 (1975)., 1975