SYNOPSIS DER SCHNITTHEORIE

Längen

Ein Modul M heißt *einfach* wenn für $N \subsetneq M$ immer $N = 0$ gilt.
Ein Modul M hat *endliche Länge* wenn es eine Kette von Untermoduln

$$(0) = M_r \subseteq M_{r-1} \subseteq \cdots \subseteq M_1 \subseteq M_0 = M$$

gibt, für die M_i/M_{i+1} immer einfach ist.
Es sei

$$0 \to N \to M \to P \to 0 \tag{1}$$

exakt. Dann hat M endliche Länge, genau dann, wenn dies für N und P gilt.
Beweis. Um dies einzusehen betrachte man eine Kette $\cdots \subseteq M_{i-1} \subseteq M_i \subseteq \cdots$ wie oben für M und die exakten Sequenzen

$$0 \to (M_i \cap N)/(M_{i+1} \cap N) \to M_i/M_{i+1} \to (M_i + N)/(M_{i+1} + N) \to 0$$

Man erkennt, daß ein Elementarschritt in der Mitte immer einen Schritt entweder links oder rechts nach sich zieht.
Hat ein Modul M endliche Länge mit zwei Ketten $(M_i)_{i=1}^r$ und $(M'_j)_{j=1}^s$, so setzt man in obiger Sequenz $N = M'_1$ und erkennt induktiv $r = s$. Diese Zahl heißt dann $\operatorname{len}_A M$, die *A-Länge von M*.
Für die Sequenz (1) gilt dann $\operatorname{len} M = \operatorname{len} N + \operatorname{len} P$.

Lemma 0.1. *Ist A ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul, so gibt es eine Filtrierung $(0) \subseteq \cdots \subseteq M_{i-1} \subseteq M_i \subseteq \cdots \subseteq M$ mit*

$$0 \to M_{i-1} \to M_i \to A/\mathfrak{p}_i \to 0$$

mit Primidealen $\mathfrak{p}_i$ und $\operatorname{Ass} M \subseteq \{\mathfrak{p}_i\}$.

Es ist äquivalent:

(1) $\operatorname{len} M < \infty$.
(2) Alle $\mathfrak{p}_i$ sind maximal.

Es sei A noethersch und $\operatorname{len} M < \infty$. Dann ist

$$\operatorname{len}_A M = \sum_{\mathfrak{p} \subseteq A} \operatorname{len}_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$$

Ein $A_\mathfrak{p}$-Modul M ist genau dann einfach, wenn er als A-Modul einfach ist. Daher ist dann auch $\operatorname{len}_A M = \operatorname{len}_{A_\mathfrak{p}} M$.

Proposition 0.1. *Es seien $(B, \mathfrak{q})$ und $(A, \mathfrak{p})$ zwei lokale Artinringe und B eine flache A–Algebra. Dann ist*

$$\operatorname{len} B = (\operatorname{len} A)\operatorname{len}(B/\mathfrak{p}B) \tag{2}$$

Herbrandtquotienten

Es sei M ein A–Modul, $\varphi : M \to M$ ein A–Endomorphismus dann sei ${}_\varphi M = \ker \varphi$ sowie $M_\varphi = M/\operatorname{im}\varphi = \operatorname{coker}\varphi$.

Definition 0.1. *Ist $\operatorname{len}_A {}_\varphi M < \infty$ und $\operatorname{len}_A M_\varphi < \infty$, so ist*

$$e_A(\varphi; M) = e(\varphi; M) = \operatorname{len}_A M_\varphi - \operatorname{len}_A {}_\varphi M \tag{3}$$

der Herbrandtquotient *von M bezüglich φ.*

Ist A noethersch und M ein A-Modul, so ist

$$e_A(\phi, M) = \sum_{\mathfrak{p} \subseteq A} e_{A_\mathfrak{p}}(\phi_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p})$$

Proposition 0.2. *Es sei M ein A–Modul wie oben und φ, ψ zwei Endomorphismen von M. Dann sind alle drei Herbrandquotienten $e(\varphi; M)$, $e(\psi; M)$, $e(\psi\,\varphi; M)$ definiert, wenn zwei von ihnen es sind.*
Es gilt dann auch

$$e(\psi\,\varphi; M) = e(\psi; M) + e(\varphi; M). \tag{4}$$

(5)

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & M_\psi \arrow[l] & M_{\psi\varphi} \arrow[l] \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[d] & & M \arrow[uur] \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & {}_\varphi M \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r, "\varphi"] & M \arrow[u, "\psi"] \arrow[r] & M_\varphi \arrow[r] \arrow[uu, "\psi"] & 0 \\
 & & & & X \arrow[u] \\
 & {}_{\psi\varphi} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[uur] & {}_\psi M \arrow[r] \arrow[u] & Y \arrow[r] \arrow[uur, dotted, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Lemma 0.2. *Sind für*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\chi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

zwei von den $e_A(\phi, N)$, $e_A(\psi, M)$, $e_A(\chi, P)$ definiert, so auch der dritte und es ist

$$e_A(\psi, M) = e_A(\phi, N) + e_A(\chi, P)$$

Lemma 0.3. *Es sei $M = A^n$ ein endlich erzeugter freier A–Modul und $\phi : M \to M$ ein A–linearer Endomorphismus. Dann ist $e_A(\phi, M)$ genau dann definiert, wenn $e_A(\det(\phi), A)$ definiert ist und es gilt*

$$e_A(\phi, M) = e_A(\det(\phi), A) \tag{6}$$

Beweis. Ist $e_A(\phi)$ wohldefiniert, so auch alle $e_{A_\mathfrak{p}}(\phi_\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p} \subseteq A$, prim. Insbesondere ist $\operatorname{Ass}_{A_\mathfrak{m}}((M/\phi(M))_\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}\}$ für endlich viele $\mathfrak{m}$, maximal. Es kann dann nicht $\det\phi \in \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ sein, denn dann wäre $\operatorname{rang}(\phi \otimes_A A/\mathfrak{p}) < n$ und $\operatorname{coker}(\phi \otimes_A A/\mathfrak{p}) = (\operatorname{coker}\phi) \otimes_A A/\mathfrak{p}$ nicht von endlicher Länge. Also ist entweder $\det\phi \in A^*_\mathfrak{m}$ und $e_A(\phi) = e_A(\det\phi) = 0$ oder $\mathfrak{m} \supseteq (\det\phi)$ von der Höhe 1 oder 0. In beiden Fällen ist $e_A(\det\phi)$ wohldefiniert, für A artinsch ist es selbstverständlich, ansonsten folgt es aus $\operatorname{Ann}(\det(\phi))_\mathfrak{p} = (0)$ für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$.
Umgekehrt sei für $\det\phi = \delta$ die Funktion $e_A(\delta)$ wohldefiniert, also $A/\delta A$ und $\ker\delta$ von endlicher Länge. Wegen $\psi = \delta E = \phi\phi_{\mathrm{ad}} = \phi_{\mathrm{ad}}\phi$ ist $M/\phi(M)$ ein Quotient von $M/\psi(M)$ und $\ker\phi \subseteq \ker\psi$. Da $M/\psi(M)$ und $\ker\psi$ von endlicher Länge sind, gilt dies auch für $M/\phi(M)$ und $\ker\phi$.
Um die Gleichheit $e_A(\phi) = e_A(\det\phi)$ allgemein zu zeigen, beweisen wir sie erst für einen (lokalen) Ring $(A, \mathfrak{m})$ der entweder ein Artinring oder eindimensional mit einem minimalen Primideal $\mathfrak{p}$ ist. Ist $\phi \sim R$ mit $R \in \operatorname{Mat}(A, n \times n)$, so können wir $T = RB$ mit

$$\begin{pmatrix} \det\phi & t'_1 \\ 0 & t'_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & t'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

schreiben. Ist A eindimensional, so können wir $b_1 \notin \mathfrak{p}$ annehmen, also die Wohldefiniertheit von $e_A(b_1)$ also von $e_A(B)$ und damit von $e_A(T)$,
Da T und B die Zerlegung $A^n = A \oplus A^{n-1}$ respektieren, folgt durch Induktion über n immer $e_A(T) = e_A(\det T)$ und $e_A(B) = e_A(\det B)$. Weiterhin ist wegen $T = RB$ auch $\det T = (\det R)(\det B)$ und damit $e_A(T) = e_A(R) + e_A(B)$ sowie $e_A(\det T) = e_A(\det R) + e_A(\det B)$. Alles zusammen also $e_A(R) = e_A(\det R)$.
Der allgemeine Fall wird dann durch einen eindimensionalen lokalen Ring $(A, \mathfrak{m})$ mit endlich vielen minimalen Primidealen $\mathfrak{p}_i$ repräsentiert. Wir benutzen die übliche Filtrierung

$$0 \to \mathfrak{a}_{i-1} \to \mathfrak{a}_i \to A/\mathfrak{q}_i \to 0$$

wo $\mathfrak{q}_i$ entweder ein $\mathfrak{p}_i$ oder $\mathfrak{m}$ ist. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{a}_{i-1} \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{i-1}"] & \mathfrak{a}_i \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\phi_i"] & (A/\mathfrak{q}_i)^n \arrow[r] \arrow[d, "\psi_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{a}_{i-1} \otimes_A M \arrow[r] & \mathfrak{a}_i \otimes_A M \arrow[r] & (A/\mathfrak{q}_i)^n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

liefert uns $e_A(\phi_i) = e_A(\phi_{i-1}) + e_A(\psi_i)$ und ein analoges Diagramm für $\det\phi$ liefert $e_A(\det\phi_i) = e_A(\det\phi_{i-1}) + e_A(\det\psi_i)$. Nach Induktion ist $e_A(\phi_{i-1}) = e_A(\det\phi_{i-1})$ und nach dem obigen Spezialfall auch $e_A(\psi_i) = e_A(\det\psi_i)$. Zusammen also $e_A(\phi_i) = e_A(\det\phi_i)$ und deshalb am Ende der Induktionskette $e_A(\phi) = e_A(\det\phi)$.

Lemma 0.4. *Es sei A ein eindimensionaler lokaler Ring mit minimalen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$. Weiter sei M ein endlich erzeugter A–Modul und $a \in A$ mit $a \notin \mathfrak{p}_j$ für alle j. Dann gilt*

$$\begin{aligned} e_A(a, M) &= \sum_{i=1}^t \operatorname{len}_{A_{\mathfrak{p}_i}}(M_{\mathfrak{p}_i}) \cdot e_A(a, A/\mathfrak{p}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^t \operatorname{len}_{A_{\mathfrak{p}_i}}(M_{\mathfrak{p}_i}) \cdot \operatorname{len}_A(A/(\mathfrak{p}_i, aA)) \end{aligned} \tag{8}$$

Die Funktion ord_A

Es sei A ein eindimensionaler Integritätsring mit Quotientenkörper K.
Dann existiert eine Abbildung

$$\operatorname{ord}_A : K^* \to \mathbb{Z}, \quad f \mapsto \operatorname{ord}(f) \tag{9}$$

Diese ist folgendermaßen definiert:
Es sei sei $f = a/s$, mit $a, s \in A - \{0\}$, ein beliebiges Element von K^*. Definiere für $a \in A$ die Abbildung $\phi_a : A \to A$ mit $\phi_a(x) = ax$ und setze

$$\operatorname{ord}_A(a) = e_A(\phi_a; A) = \operatorname{len}_A(A/aA) \tag{10}$$

Weiterhin setze

$$\operatorname{ord}_A(f) = \operatorname{ord}_A(a/s) = \operatorname{ord}_A(a) - \operatorname{ord}_A(s) \tag{11}$$

Es sei nun X ein integres Schema und $x \in X$ ein Punkt der Höhe 1. Dann ist $A = \mathcal{O}_{X,x}$ ein eindimensionaler Integritätsring und es existiert damit auch die Abbildung ord_A, die wir auch mit v_x bezeichnen werden:

$$v_{\mathcal{O}_{X,x}} = v_x = \operatorname{ord} : K(X)^* \to \mathbb{Z}, \quad f \mapsto v_x(f) \tag{12}$$

Lemma 0.5. *Es sei A ein eindimensionaler Integritätsbereich mit Quotientenkörper $K = Q(A)$. Weiter sei $\phi : M \to M$ ein Endomorphismus eines endlich erzeugten A–Moduls M und $\phi_K : M \otimes_A K \to M \otimes_A K$ der induzierte Endomorphismus. Wenn dann $\det(\phi_K) \neq 0$ ist, so gilt*

$$e_A(\phi, M) = \operatorname{ord}_A(\det(\phi_K)) \tag{13}$$

Die Gruppe $A(X)$

Es sei X ein algebraisches Schema über dem Grundkörper K. Weiter sei

$$\begin{aligned} Z_k(X) &= \bigoplus_{\substack{V \subseteq X \\ \dim V = k \\ V \text{ integer}}} \mathbb{Z} = \\ &= \left\{ \sum_i m_i[V_i] \mid m_i \in \mathbb{Z}, V_i \text{ Untervarietät von } X \text{ mit } \dim V_i = k \right\} \end{aligned} \tag{14}$$

Definition 0.2. *Die Gruppe $Z_k(X)$ ist die Gruppe der k–Zykel von X. Es sei $Z_*(X) = \bigoplus_k Z_k(X)$.*

Definition 0.3. *Ist X eine Varietät mit $\dim X = n$ und $f \in K(X)^*$ dann ist*

$$\operatorname{div}_X(f) = \operatorname{div}(f) = \sum_{\substack{x \in X, \\ \dim \mathcal{O}_{X,x} = 1}} v_x(f)\{x\}^- \subseteq Z_{n-1}(X) \tag{15}$$

der Divisor von f auf X.

Proposition 0.3. *Für X Varietät mit $\dim X = n$ und $f \in K(X)^*$ ist*

$$\operatorname{div}(f^{-1}) = -\operatorname{div}(f) \in Z_{n-1}(X). \tag{16}$$

Ist X ein algebraisches Schema und $W \subseteq X$ eine $(k+1)$–dimensionale Untervarietät sowie $f \in K(W)^*$, so ist

$$\operatorname{div}(f) = \sum v_{V_i}(f)[V_i] \tag{17}$$

eine formale Summe von k-dimensionalen Untervarietäten V_i von W und damit auch von X. Also ist $\operatorname{div}(f) \subseteq Z_k(X)$.

Definition 0.4. *Ein Zykel $\alpha \in Z_k(X)$ heißt* rational äquivalent zu 0, *geschrieben $\alpha \sim 0$, wenn ein System $W_1, \dots, W_r \subseteq X$ von Varietäten und rationalen Funktionen $f_i \in K(W_i)^*$ existiert, so daß*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{div}(f_i) \tag{18}$$

ist. Wir schreiben

$$\operatorname{Rat}_k(X) = \{\alpha \in Z_k(X) \mid \alpha \sim 0\} \tag{19}$$

Proposition 0.4. *Die Menge $\operatorname{Rat}_k(X)$ ist eine Untergruppe von $Z_k(X)$.*

Beweis. Ist $\alpha, \beta \sim 0$ mit $\alpha = \sum_i \operatorname{div}_{W_i}(f_i)$ und $\beta = \sum_j \operatorname{div}_{W'_j}(f'_j)$, so ist $-\alpha = \sum \operatorname{div}_{W_i}(f_i^{-1})$ und $\alpha + \beta = \sum_i \operatorname{div}_{W_i}(f_i) + \sum_j \operatorname{div}_{W'_j}(f'_j) \sim 0$.

Definition 0.5. *Die Quotientengruppe $Z_k(X)/\operatorname{Rat}_k(X)$ ist $A_k(X)$, die Gruppe der k–*Zykelklassen. *Es sei $A_*(X) = \bigoplus_k A_k(X)$*

Proposition 0.5. *Es sei X ein Schema und X_{red} sein reduziertes abgeschlossenes Unterschema. Dann ist $Z_k(X) = Z_k(X_{red})$ und $A_k(X) = A_k(X_{red})$.*

Proposition 0.6. *Es sei $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ eine Zerlegung von X in disjunkte Komponenten. Dann ist $Z_k(X) = Z_k(X_1) \oplus \dots \oplus Z_k(X_r)$ und $A_k(X) = A_k(X_1) \oplus \dots \oplus A_k(X_r)$.*

Proposition 0.7. *Es seien $X_1, X_2 \subseteq X$ abgeschlossenene Unterschemata von einem Schema X. Dann ist die Sequenz*

$$A_k(X_1 \cap X_2) \to A_k(X_1) \oplus A_k(X_2) \to A_k(X_1 \cup X_2) \to 0 \tag{20}$$

exakt.

Beweis. Man beachte, daß für jedes irreduzible $Z \subseteq X_1 \cup X_2$ immer $Z \subseteq X_1$ oder $Z \subseteq X_2$ ist.

Eigentlicher Push-forward

Definition 0.6. *Es sei $f : X \to Y$ eine eigentliche Abbildung algebraischer Schemata. Dann definiert f eine Abbildung $Z_k(X) \to Z_k(Y)$ gemäß folgender Vorschrift*

$$f_* V = \begin{cases} [k(V) : k(W)]W & \text{für } W = f(V) \text{ falls } \dim W = \dim V = k \\ 0 & \text{falls } \dim f(V) \neq \dim V \end{cases} \tag{21}$$

für jede irreduzible k–dimensionale Varietät $V \in Z_k(X)$ und entsprechender Erweiterung durch $\mathbb{Z}$–Linearität.

Proposition 0.8. *Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ eigentliche Abbildungen algebraischer Schemata. Dann ist $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

Proposition 0.9. *Es sei $f : X \to Y$ eine eigentliche Abbildung algebraische Schemata. Dann ist $f_* \operatorname{Rat}_k(X) \subseteq \operatorname{Rat}_k(Y)$. Also induziert f_* eine Abbildung $f_* : A_k(X) \to A_k(Y)$.*

Diese Behauptung folgt aus zwei Hauptpropositionen. Zunächst die erste Hauptproposition:

Proposition 0.10. *Es sei $f : X \to Y$ eine eigentliche, surjektive Abbildung von l–Varietäten. Weiter sei $\dim X = k+1$ und $\dim Y \leqslant k$, sowie $r \in K(X)^*$. Dann ist*

$$f_* \operatorname{div}_X(r) = 0 \tag{22}$$

Lemma 0.6. *Es sei $f : X \to l$ eine eigentliche eindimensionale l-Varietät über einem Körper l. Weiter sei $r \in K(X)^*$ eine rationale Funktion auf X. Dann ist mit einer Summe über die abgeschlossenen Punkte $P \in X$:*

$$\operatorname{div}_X(r) = \sum_{P \in X} v_P(r) P = \sum_{P \in X} n_P P \tag{23}$$

und es gilt

$$\sum_{P \in X} n_P [k(P) : l] = 0 \tag{24}$$

Lemma 0.7. *Es sei $f : X \to Y$ eine eigentliche Abbildung von l–Varietäten und $\dim X = k+1$ sowie $\dim Y = k$.*
Weiter sei $j : Y' = \operatorname{Spec}(K(Y)) \to Y$ die kanonische Abbildung des generischen Punktes, eine flache Abbildung. Man habe das cartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "j'"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & Y' \arrow[l, "j"] \end{tikzcd} \tag{25}$$

Es ist dann X' eine eindimensionale, eigentliche $K(Y)$–Varietät.
Weiterhin induzieren j und j' Abbildungen $j'^* : Z_k(X) \to Z_0(X')$ und $j^* : Z_k(Y) \to Z_0(Y')$, für die gilt

$$f'_* j'^* \alpha = j^* f_* \alpha \tag{26}$$

für einen Zykel $\alpha \in Z_k(X)$. Die Abbildung $j^* : Z_k(Y) \to Z_0(Y')$ ist ein Isomorphismus. Schließlich ist für ein $r \in K(X)^*$ und sein Bild $r' \in K(X')^*$ unter der kanonischen Abbildung $K(X) \to K(X')$:

$$j'^* \operatorname{div}_X(r) = \operatorname{div}_{X'}(r') \tag{27}$$

Nun zur zweiten Hauptproposition:

Proposition 0.11. *Es sei $f : X \to Y$ eine eigentliche, surjektive Abbildung von l–Varietäten. Weiter sei $\dim X = \dim Y = k+1$. Dann ist $L = K(X)$ eine endliche Erweiterung von $K = K(Y)$ und für $r \in K(X)^*$ gilt*

$$f_* \operatorname{div}_X(r) = \operatorname{div}_Y \operatorname{Norm}_{[L:K]}(r) \tag{28}$$

Definition 0.7. *Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung von integren Schemata und $L = K(X)$ eine endliche Erweiterung von $K = K(Y)$. Damit ist die Abbildung*

$$\operatorname{Norm}_{[L:K]} : L \to K$$

definiert. Gilt nun für jedes $r \in L^*$ sowie $y \in Y$ mit $\operatorname{ht} y = 1$ und mit den endlich vielen $x_1, \dots, x_m \in X$ mit $f(x_i) = y$ und $\operatorname{ht} x_i = 1$, daß

$$\sum_{i=1}^{m} v_{x_i}(r)[k(x_i) : k(y)] = v_y(\operatorname{Norm}_{[L:K]}(r)) \tag{29}$$

gilt, so sagen wir, daß $f : X \to Y$ die Eigenschaft $(N\,m)$ hat.

Proposition 0.12. *Es sei $f : X \to Y$ eine eigentliche surjektive Abbildung algebraischer Varietäten. die die Eigenschaft $(N\,m)$ habe.*
Mit $L = K(X)$ sowie $K = K(Y)$ gilt dann:

$$f_* \operatorname{div}_X(r) = \operatorname{div}_Y(\operatorname{Norm}_{[L:K]}(r))$$

für jedes $r \in L^*$.

Lemma 0.8. *Es sei $f : X \to Y$ eine Schemaabbildung und $V = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ mit der kanonischen Abbildung $g : V \to Y$ für ein $y \in Y$.*
Weiter sei

$$X' = X \times_Y V$$

und $p : X' \to X$ die kanonische Projektion. Dann gilt

1. *p induziert einen Homöomorphismus $p : X' \to f^{-1}(g(V))$.*
2. *Es ist für $x' \in X'$ und $x \in X$ mit $p(x') = x$ auch $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X',x'}$.*
3. *Ist X integer, so ist auch X' integer und es ist $K(X) = K(X') = L$. Für ein $r \in L^*$ und x, x' wie oben mit $\dim \mathcal{O}_{X,x} = 1$ ist dann auch $v_x(r) = v_{x'}(r)$.*

Lemma 0.9. *Es sei $B \supseteq A$ eine endliche Erweiterung von Integritätsringen und $L = Q(B)$, sowie $K = Q(A)$. Weiter sei $(A, \mathfrak{m})$ ein eindimensionaler lokaler Ring und $B_i = B_{\mathfrak{q}_i}$ für die $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_m$ mit $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{m}$. Dann ist für jedes $r \in L^*$ die Gleichung*

$$\sum_{i=1}^{m} v_{B_i}(r)[k(B_i) : k(A)] = v_A(\operatorname{Norm}_{[L:K]}(r)) \tag{30}$$

erfüllt.
Anders ausgedrückt: Die Abbildung $f : \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ hat die Eigenschaft $(N\,m)$.

Proposition 0.13. *Es sei $f : \tilde{X} \to X$ die kanonische eigentliche Abbildung von der Normalisierung $\tilde{X}$ einer Varietät X nach X. Dann ist f sogar eine endliche Abbildung und es gilt:*
f hat die Eigenschaft $(N\,m)$.

Proposition 0.14. *Es sei $f : X \to Y$ eine dominante Abbildung von Varietäten. Weiter seien $\tilde{X} \to X$ und $\tilde{Y} \to Y$ die Abbildungen der jeweiligen Normalisierungen. Dann existiert genau eine Abbildung $g : \tilde{X} \to \tilde{Y}$, so daß*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \tilde{Y} \arrow[r, "q"] & Y \end{tikzcd} \tag{31}$$

kommutiert. Ist f eigentlich, so ist auch g eigentlich. Hat g die Eigenschaft $(N\,m)$, so hat auch f die Eigenschaft $(N\,m)$.

Proposition 0.15. *Es sei $f : X \to Y$ eine surjektive, endliche, also auch eigentliche, Abbildung von Varietäten X und Y. Es sei $L = K(X)$ und $K = K(Y)$.*
Dann hat f die Eigenschaft $(N\,m)$.

Lemma 0.10. *Es sei $f : X \to Y$ eine eigentliche und surjektive Abbildung von normalen Varietäten mit $\dim X = \dim Y$. Weiter sei $L = K(X)$ und $K = K(Y)$.*
Es sei $A = \mathcal{O}_{Y,y}$ für einen Punkt $y \in Y$ der Höhe 1 und es sei

$$V = \operatorname{Spec}(A).$$

Weiter sei C der ganze Abschluß von A in L und $X_V = X \times_Y V$.
Dann ist $\dim \operatorname{Spec}(C) = 1$ und es existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_V \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \operatorname{Spec}(C) \arrow[dl] \\ V & \end{tikzcd} \tag{32}$$

in dem g ein Isomorphismus ist

Proposition 0.16. *Es sei $f : X \to Y$ eine eigentliche und surjektive Abbildung von normalen Varietäten mit $\dim X = \dim Y$. Es sei $L = K(X)$ und $K = K(Y)$ sowie $r \in L^*$.*
Dann hat $f : X \to Y$ die Eigenschaft $(N\,m)$.

Algebraische Zykel von Schemata und Unterschemata

Definition 0.8. *Es sei X ein algebraisches Schema und $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ seine Zerlegung in irreduzible Komponenten. Dann ist $[X] \in Z_*(X)$ definiert als*

$$[X] = \sum_{i=1}^{r} m_i [X_i] \tag{33}$$

wobei $m_i = \operatorname{len} \mathcal{O}_{X,X_i}$ ist. Wir nennen m_i die geometrische Multiplizität *von X_i in X. Gegebenenfalls schreiben wir auch $[X]$ für das Bild von $[X]$ unter $Z_*(X) \to A_*(X)$.*

Bemerkung 0.1. *Ist $X \subseteq Y$ ein abgeschlossenes Unterschema, so schreiben wir auch $[X]$ für das Bild von $[X]$ unter der Abbildung $Z_*(X) \to Z_*(Y)$. Ebenso stehe $[X]$ auch für das Bild von $[X]$ in $A_*(Y)$.*

Bemerkung 0.2. *Ist X rein k–dimensional, also $\dim X_i = k$ für alle i, so ist $[X] \in Z_k(X)$ und es ist $A_k(X) = Z_k(X) = \{\sum n_i [X_i] \mid n_i \in \mathbb{Z}\}$.*

Bemerkung 0.3. *Es sei $A = K[x_1, \dots, x_n]$ und $X = \operatorname{Spec}(A/I)$ für ein Ideal $I \subseteq A$. Weiter sei $I \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_r$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten, also minimale Primideale über I. Dann ist $m_i = \operatorname{len}(A/I)_{\mathfrak{p}_i}$.*

Flacher pull–back

Eine flache Abbildung $f : X \to Y$ sei hier stets eine *flache Abbildung der Relativdimension n*, wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt.
Beispiele solcher Abbildungen sind:

1. Eine offene Einbettung $U \subseteq X$ (Relativdimension 0)

(2) Die Projektion eines Vektorbündels $p : E \to X$ oder eine $\mathbb{A}^n$–Bündels oder eines projektiven Bündels $p : \mathbb{P}(\mathscr{E}) \to X$.
(3) Die Projektion $p : Y \times_k Z \to Y$ für ein algebraisches Schema $Z \to k$ der reinen Dimension n.
(4) Ein dominanter Morphismus $f : X \to C$ von einer n–dimensionalen Varietät auf eine nichtsinguläre Kurve C. (Relativdimension $n-1$).

Definition 0.9. *Es sei $f : X \to Y$ ein flacher Schemamorphismus mit Relativdimension n. Weiter sei $V \subseteq Y$ eine Untervarietät. Dann sei*

$$f^*(V) = [f^{-1}(V)]. \tag{34}$$

Diese Festsetzung dehnt sich $\mathbb{Z}$–linear zu einer Abbildung

$$f^* : Z_k(Y) \to Z_{k+n}(X) \tag{35}$$

aus.

Lemma 0.11. *Es sei $f : X \to Y$ ein flacher Schemamorphismus. Dann ist für jedes Unterschema $Z \subseteq Y$*

$$f^*([Z]) = [f^{-1}(Z)]. \tag{36}$$

Korollar 0.1. *Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ flache Morphismen mit Relativdimension. Dann ist auch $g \circ f$ ein solcher, und es gilt*

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \tag{37}$$

Proposition 0.17. *Es sei*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \tag{38}$$

ein cartesisches Quadrat mit g flach und f eigentlich. Dann ist g' flach und f' eigentlich und und es gilt

$$f'_* g'^* \alpha = g^* f_* \alpha \tag{39}$$

in $Z_* Y'$ für alle $\alpha \in Z_* X$.

Beweis. Es ist oBdA Y affin und mit dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \times_Y U \arrow[r] \arrow[dd] & Y' \times_Y U \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ & X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ V \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

führt man alles auf X, Y, Y', X' affin zurück. Es ergibt sich:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_m \arrow[dr] & & & \mathfrak{q} \arrow[dl] \arrow[ll] \\ & B' & B \arrow[l] & \\ & A' \arrow[u] & A \arrow[l] \arrow[u] & \\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r} \arrow[uuu] \arrow[ur] & & & \mathfrak{p} \arrow[uuu] \arrow[ul] \arrow[ll] \end{tikzcd} \tag{40}$$

mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \otimes_A A' = \mathfrak{p}A'$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{q} \otimes_B B' = \mathfrak{q}B'$. und A'/A flach. Tensoriere mit $A/\mathfrak{p}$ und betrachte das Diagramm von Artinringen, das in den Ringen $(B'/\mathfrak{p}B')_{\mathfrak{s}_i} = \bar{B}'_i$ kulminiert:

$$\begin{tikzcd} & (\bar{B}'_i, \mathfrak{s}_i) & \\ \bar{B}'/\mathfrak{r}\bar{B}' & \bar{B}' \arrow[l] \arrow[u] & (\bar{B}, \mathfrak{q}) \arrow[l] \\ \bar{A}'/\mathfrak{r} \arrow[u] & (\bar{A}', \mathfrak{r}) \arrow[l] \arrow[u] & (\bar{A}, \mathfrak{p}) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} \operatorname{len} \bar{B}' &= \sum \operatorname{len} \bar{B}'_i = \sum (\operatorname{len} \bar{B}'_i/\mathfrak{q}\bar{B}'_i)(\operatorname{len} \bar{B}) \\ \sum \operatorname{len} \bar{B}'_i/\mathfrak{r}\bar{B}'_i &= \operatorname{len} \bar{B}'/\mathfrak{r}\bar{B}' \\ \operatorname{len} \bar{B}'/\mathfrak{r}\bar{B}' &= \operatorname{len} \bar{B} \\ \operatorname{len} \bar{B}' &= \sum (\operatorname{len} \bar{A}') \operatorname{len}(\bar{B}'_i/\mathfrak{r}\bar{B}'_i) = \\ &= (\operatorname{len} \bar{A}')(\operatorname{len} \bar{B}'/\mathfrak{r}\bar{B}') = (\operatorname{len} \bar{A}')(\operatorname{len} \bar{B}) \end{aligned}$$

Theorem 0.1. *Es sei $f : X \to Y$ ein flacher Morphismus der relativen Dimension n. Weiter sei $\alpha \in Z_k Y$ mit $\alpha \sim 0$, also rational äquivalent zu Null. Dann ist $f^*\alpha \sim 0$ in $Z_{k+n} X$.*

Korollar 0.2. *Die Abbildung $f^* : Z_* Y \to Z_* X$ induziert eine Abbildung $f^* : A_* Y \to A_* X$.*

Lemma 0.12. *Es sei X ein rein n–dimensionales Schema mit irreduziblen Komponenten $X_1, \dots, X_r$ und geometrischen Multiplizitäten $m_1, \dots, m_r$. Weiter sei D ein effektiver Cartierdivisor auf X, also ein Unterschema, das lokal auf $U \subseteq X$, affin, offen, durch einen Nichtnullteiler $f \in \mathscr{O}_X(U)$ gegeben ist.*
Es sei $D_i = D \cap X_i$ die Restriktion von D auf X_i. Dann gilt

$$[D] = \sum_{i=1}^{r} m_i [D_i] \tag{41}$$

in $Z_{n-1}(X)$.

Eine exakte Sequenz

Proposition 0.18. *Es sei $i : Y \to X$ die Inklusion eines abgeschlossenen Unterschemas Y von X. Weiter sei $U = X - Y$ und $j : U \to X$ die entsprechende Inklusion. Dann ist die Sequenz*

$$A_k Y \xrightarrow{i_*} A_k X \xrightarrow{j^*} A_k U \to 0 \tag{42}$$

exakt für alle k.

Beweis. Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 & 0 & 0 & \\ A_k Y \arrow[u] \arrow[r, "i_*"] & A_k X \arrow[u] \arrow[r, "j^*"] & A_k U \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\ Z_k Y \arrow[u] \arrow[r, "i_*"] & Z_k X \arrow[u] \arrow[r, "j^*"] & Z_k U \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\ \mathrm{Rat}_k Y \arrow[u] \arrow[r, "\phi"] & \mathrm{Rat}_k X \arrow[u] \arrow[r, "\psi"] & \mathrm{Rat}_k U \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd} \tag{43}$$

wo in der untersten Sequenz die Beziehung $\psi \circ \phi = 0$ offensichtlich gilt.

Proposition 0.19. *Es sei*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "q"'] & X' \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd} \tag{44}$$

ein cartesisches Quadrat von Schemata, wo i eine abgeschlossene Immersion und p eigentlich ist. Weiter induziere p einen Isomorphismus $p' : X' - Y' \to X - Y$.
Dann ist die Sequenz

$$A_k Y' \xrightarrow{a} A_k Y \oplus A_k X' \xrightarrow{b} A_k X \to 0 \tag{45}$$

mit $a(\alpha) = (q_*(\alpha), -i'_*(\alpha))$ und $b(\alpha_1, \alpha_2) = i_*\alpha_1 + p_*\alpha_2$ exakt.

Beweis. Betrachte für alles folgende das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A_k Y' \arrow[r, "i'_*"] \arrow[d, "q_*"'] & A_k X' \arrow[r, "j'^*"] \arrow[d, "p_*"] & A_k U' \arrow[r] \arrow[d, "p'_*"] & 0 \\ A_k Y \arrow[r, "i_*"] & A_k X \arrow[r, "j^*"] & A_k U \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{46}$$

mit dem Isomorphismus $p' : U' = X' - Y' \to X - Y = U$ und den Inklusionen $j : U \to X$ und $j' : U' \to X'$.
Es bleibt noch die Identität $\ker i_* = q_* \ker i'_*$. Die Inklusion $q_* \ker i'_* \subseteq \ker i_*$ ist klar. Sei also $\alpha \in A_k Y$ mit $i_*\alpha = 0$. Wir ziehen jetzt auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z_k Y' \arrow[r, "i'_*"] \arrow[d, "q_*"'] & Z_k X' \arrow[r, "j'^*"] \arrow[d, "p_*"] & Z_k U' \arrow[r] \arrow[d, "p'_*"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z_k Y \arrow[r, "i_*"] & Z_k X \arrow[r, "j^*"] & Z_k U \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{47}$$

heran.

Affine Bündel

Ein Schema E zusammen mit einem Morphismus $p : E \to X$ heißt *affines Bündel (vom Rang n)*, wenn es eine offene Überdeckung (U_α) von X mit offenen Mengen gibt, so daß die Abbildungen

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "g_\alpha"] \arrow[d, "p"'] & U_\alpha \times \mathbb{A}^n \arrow[dl] \\ U_\alpha & \end{tikzcd} \tag{48}$$

kommutieren und alle g_α Isomorphismen sind.

Proposition 0.20. *Es sei $p : E \to X$ ein affines Bündel vom Rang n und X ein noethersches Schema. Dann ist der flache pull-back*

$$p^* : A_k X \to A_{k+n} E \tag{49}$$

surjektiv für alle k.

Weildivisoren und Cartierdivisoren

Es sei X ein Schema und **OuvAff**(X) die Kategorie der affinen offenen Teilmengen $U = \operatorname{Spec}(A)$ von X mit den durch die Abbildungen $A \to A_f$ induzierten offenen Immersionen als Morphismen.
Weiter sei für jeden Ring A die multiplikativ abgeschlossene Menge S_A gleich der Menge der Nichtnullteiler von A, also der $f \in A$ mit $0 \to A \xrightarrow{\cdot f} A$ injektiv. Wir nennen dann $Q(A) = S_A^{-1} A$ den *Funktionenkörper* von A. Es gibt kanonische Abbildungen $Q(A) \to Q(A_g)$ für jedes $g \in A$.
Die Zuordnung $\mathscr{K}(U) = Q(\mathscr{O}_X(U))$ für jedes $U \subseteq X$, offen, affin, definiert also eine Prägarbe $\mathscr{K}_X$ auf **OuvAff**(X), deren Garbifizierung eine Garbe auf X ist, die wir ebenfalls mit $\mathscr{K}_X$ bezeichnen.
Es seien $\mathscr{O}_X^*(U)$ und $\mathscr{K}_X^*(U)$ die multiplikativen Gruppen, der von 0 verschiedenen Elemente von $\mathscr{O}_X(U)$ und $\mathscr{K}_X(U)$. Diese definieren eine exakte Sequenz von multiplikativen abelschen Garben

$$1 \to \mathscr{O}_X^* \to \mathscr{K}_X^* \to \mathscr{D} \to 1 \tag{50}$$

Definition 0.10. *Es sei X ein Schema. Dann ist $\Gamma(X, \mathscr{D}) = \operatorname{CaDiv} X$ die (abelsche) Gruppe der* Cartier–Divisoren von X.

Ein Cartier–Divisor D kann also als Familie (f_i, U_i) mit einer offenen Überdeckung $\bigcup_i U_i = X$ und $f_i \in \mathscr{K}_X^*(U_i)$ angesehen werden, für die $g_{ij} = f_i^{-1} f_j \in \mathscr{O}_{U_{ij}}^*(U_{ij})$ ist, mit $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Die Summe zweier Cartierdivisoren $D = (f_i, U_i)$ und $D' = (f_i', U_i)$ ist $D + D' = (f_i f_i', U_i)$, der inverse Cartierdivisor $-D$ ist (f_i^{-1}, U_i).

Definition 0.11. *Es sei X ein Schema. Ein Cartier–Divisor der Form (f, X) mit $f \in \mathscr{K}_X^*(X)$ heißt* Hauptdivisor, *geschrieben* $\operatorname{div}(f) = (f)$.

Proposition 0.21. *Die Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe* $\operatorname{CaDiv}^h X \subseteq \operatorname{CaDiv} X$.

Definition 0.12. *Sind $D, D' \in \operatorname{CaDiv} X$ und ist $D - D'$ ein Hauptdivisor, so heißen D, D'* linear äquivalent.

Definition 0.13. *Die Quotientengruppe*

$$\operatorname{CaCl} X = \operatorname{CaDiv} X / \operatorname{CaDiv}^h X \tag{51}$$

ist die Gruppe der Cartierdivisorenklassen auf X.

Definition 0.14. *Es sei X ein Schema und $D = (f_i, U_i)$ ein Cartier–Divisor auf X. Weiter sei $V \subseteq X$ eine 1–kodimensionale Untervarietät von X. Dann ist*

$$v_V(D) = v_{\mathscr{O}_{X,V}}(f_i) \tag{52}$$

für ein i mit $U_i \cap V \neq \emptyset$. Da $f_i^{-1} f_j \in \mathscr{O}_{U_{ij}}^*(U_{ij})$ ist die Definition von dem gewählten i unabhängig.

Definition 0.15. *Es sei X eine Varietät mit $\dim X = n$. Dann ist*

$$\operatorname{Div} X = Z_{n-1}(X) \tag{53}$$

die Gruppe der Weildivisoren von X *und*

$$\operatorname{Cl} X = A_{n-1}(X) = Z_{n-1}(X)/\operatorname{Rat}_{n-1}(X) \tag{54}$$

die Gruppe der Weildivisorenklassen von X.

Definition 0.16. *Es sei X eine Varietät mit $\dim X = n$ und $D = (f_i, U_i)$ ein Cartierdivisor auf X. Dann ist*

$$[D] = \sum_V v_V(D)\, V \ \in \operatorname{Div} X = Z_{n-1}(X) \tag{55}$$

wobei V durch die 1-kodimensionalen Varietäten $V \subseteq X$ läuft, der zu D assoziierte Weil–Divisor.

Proposition 0.22. *Es sei X eine Varietät mit $\dim X = n$. Dann definiert $D \mapsto [D]$ einen Gruppenhomomorphismus*

$$\operatorname{CaDiv} X \to \operatorname{Div} X \tag{56}$$

von den Cartierdivisoren in die Weildivisoren.
Dabei wird $\operatorname{CaDiv}^h X$ nach $\operatorname{Rat}_{n-1}(X)$ abgebildet, denn es ist

$$[\operatorname{div}(f)] = \operatorname{div}_X(f) \tag{57}$$

mit dem weiter oben eingeführten $\operatorname{div}_X(f) \in \operatorname{Rat}_{n-1}(X) \subseteq Z_{n-1}(X)$. Man hat also auch eine induzierte Abbildung

$$\operatorname{CaCl} X \to \operatorname{Cl} X \tag{58}$$

Definition 0.17. *Es sei X ein Schema und $D = (f_i, U_i) \in \operatorname{CaDiv} X$ ein Cartierdivisor auf X. Dann ist*

$$|D| = \operatorname{supp} D = \bigcup_{\substack{V \subseteq X \\ V \text{ Varietät} \\ f_V \notin \mathscr{O}_{X,V}^*}} V \quad \text{wobei } f_V = f_i \text{ mit } U_i \cap V \neq \emptyset \tag{59}$$

der Support von D in X. *Die Definition ist wegen $f_i^{-1} f_j \in \mathscr{O}_{U_{ij}}^*(U_{ij})$ unabhängig von der Wahl des jeweiligen i für V.*

Bemerkung 0.4. *Auf $U = X - |D|$ ist $\mathscr{O}_X(D)|_U \cong \mathscr{O}_U$. Damit existiert ein der $1 \in \mathscr{O}_U$ entsprechender trivialisierender Schnitt $s_D \in \mathscr{O}_X(D)(U)$.*

Bemerkung 0.5. *Wir können den zu einem Cartierdivisor D assoziierten Weildivisor $[D]$ auch schreiben als*

$$[D] = \sum_V v_V(D)\, V \tag{60}$$

wobei V jetzt nicht durch alle 1-kodimensionalen Varietäten $V \subseteq X$ läuft, sondern nur durch diejenigen mit $V \subseteq |D|$. Damit erkennen wir $[D] \in Z_{n-1}(|D|)$.

Neben der Zuordnung eines Weildivisors zu jedem Cartierdivisor auf einer Varietät X können wir auf einem beliebigen Schema X einem Cartierdivisor $D = (f_i, U_i)$ ein Linienbündel $\mathscr{O}_X(D)$ zuordnen.

Definition 0.18. *Es sei X ein Schema und $D = (f_i, U_i)$ aus $\operatorname{CaDiv} X$. Dann ist $\mathscr{O}_X(D)$ mit*

$$\mathscr{O}_X(D)|_{U_i} = f_i^{-1} \mathscr{O}_{U_i} \subseteq \mathscr{K}_X|_{U_i} \tag{61}$$

ein Linienbündel zusammen mit einer Inklusion $\mathscr{O}_X(D) \subseteq \mathscr{K}_X$.

Bemerkung 0.6. *Wir schreiben auch manchmal $L(D)$ für $\mathscr{O}_X(D)$.*

Es seien L, L_1, L_2 Linienbündel auf einem Schema X. Dann sind auch

$$L^{-1} = \mathscr{H}\mathrm{om}_{\mathscr{O}_X}(L, \mathscr{O}_X) \text{ und } L_1 \otimes_{\mathscr{O}_X} L_2$$

Linienbündel auf X. Die erste Abbildung definiert dabei ein Inverses für die Multiplikation, die durch die zweite Abbildung gegeben wird. Dabei ist $\mathscr{O}_X$, als Linienbündel aufgefaßt, das neutrale Element.

Definition 0.19. *Wir bezeichnen die Gruppe der Linienbündel auf einem Schema X mit $\mathbf{L}(X)$ und die Gruppe der Isomorphieklassen von Linienbündeln mit* $\operatorname{Pic} X$.

Proposition 0.23. *Für ein Schema X ist* $\operatorname{Pic} X = H^1(X, \mathscr{O}_X^*)$.

Für einen Cartierdivisor $D = (f_i, U_i)$ gibt es ein kanonisch zugeordnetes Element $c(D) \in H^1(X, \mathscr{O}_X^*)$. Dieses wird durch $U_{i_0 i_1} \mapsto f_{i_0}^{-1} f_{i_1}$ als Element von $\check{H}^1((U_i), \mathscr{O}_X^*)$ gegeben.

Proposition 0.24. *Es sei X ein beliebiges Schema. Die Abbildung $D \to \mathscr{O}_X(D)$ definiert einen Gruppenhomomorphismus* $\operatorname{CaDiv} X \to \mathbf{L}(X)$. *Es ist also*

$$\mathscr{O}_X(D) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(D') = \mathscr{O}_X(D + D') \tag{62}$$

$$\mathscr{O}_X(-D) = \mathscr{O}_X(D)^{-1} \tag{63}$$

Proposition 0.25. *Es sei X ein Schema, D ein Cartierdivisor und $\mathscr{O}_X(D)$ das zugeordnete Linienbündel. Dann ist äquivalent*

(1) Es ist $\mathscr{O}_X(D) \cong \mathscr{O}_X$.
(2) Es ist $D \in \operatorname{CaDiv}^h X$, ein Hauptdivisor.

Es ist also $c(D) = 0 \in H^1(X, \mathscr{O}_X^*)$ genau für die Hauptdivisoren $D \in \operatorname{CaDiv}^h X$. Damit ist $D \to c(D)$ eine wohldefinierte und injektive Abbildung $\operatorname{CaCl} X \to H^1(X, \mathscr{O}_X^*)$. Weiterhin ergeben die beiden vorangehenden Propositionen eine injektive Abbildung $\operatorname{CaCl} X \to \operatorname{Pic} X$.

Proposition 0.26. *Wir haben ein Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \operatorname{CaCl} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & \operatorname{Pic} X \arrow[dl, "\gamma"] \\ H^1(X, \mathscr{O}_X^*) & \end{tikzcd} \tag{64}$$

Dabei sind die Abbildungen α, β, γ die oben eingeführten, insbesondere ist $\alpha(D) = c(D)$. Die Abbildungen α und β sind injektiv, die Abbildung γ ist, wie oben bemerkt, ein Isomorphismus.

Proposition 0.27. *Ist X eine Varietät, so ist* $\operatorname{CaCl} X \to \operatorname{Pic} X$ *auch surjektiv, also ein Isomorphismus.*

Dies folgt, da für eine Varietät X die Garbe $\mathscr{K}_X$ welk ist, aus der exakten Sequenz $0 \to \mathscr{O}_X^* \to \mathscr{K}_X^* \to \mathscr{D} \to 0$ und der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenz.

Definition 0.20. *Es sei X ein beliebiges Schema und $D = (f_i, U_i)$ ein Cartierdivisor. Weiter sei $\mathscr{O}_X(D)$ das assoziierte Linienbündel $(f_i^{-1} \mathscr{O}_{U_i})$. Es sei $Z = |D|$ der Support von D und $U = X - Z$, sowie $U_i' = U_i \cap U$. Es ist dann $f_i|_{U_i'} \in \mathscr{O}_X^*(U_i')$, also $1 \in f_i^{-1} \mathscr{O}_{U_i'} \subseteq \mathscr{K}_X(U_i')$.*
Die einzelnen $1 = 1_{U_i'}$ verkleben zu einem Schnitt $1 \in \mathscr{O}_X(D)(U) \subseteq \mathscr{K}_X(U)$. Diesen nennen wir auch s_D.

Pseudodivisoren

Definition 0.21. *Es sei X ein Schema und (L, Z, s) ein Tripel bestehend aus einem Linienbündel L auf X, einer abgeschlossenen Teilmenge $Z \subseteq X$ und einem nirgends verschwindenden Schnitt $s \in L(X - Z)$.*
Dann heißt (L, Z, s) Pseudodivisor auf X. *Es heißen L das* Linienbündel, Z der Support *und s* der Schnitt *des Pseudodivisors.*

Definition 0.22. *Zwei Pseudodivisoren (L, Z, s) und (L', Z', s') auf einem Schema X heißen* äquivalent, *wenn $Z = Z'$ ist und ein $\mathscr{O}_X$-Isomorphismus $\sigma : L \to L'$ existiert, so daß $\sigma_{X-Z}(s) = s'$ ist.*

Definition 0.23. *Es sei D ein Cartier–Divisor auf einem Schema X. Weiter sei $\mathscr{O}_X(D)$ sein zugehöriges Linienbündel, $|D|$ sein Support und $s_D \in \mathscr{O}_X(D)(X - |D|)$ sein assoziierter trivialisierender Schnitt.*
Dann ist $(\mathscr{O}_X(D), |D|, s_D)$ der zu D gehörige Pseudodivisor.

Definition 0.24. *Ein Pseudodivisor (L, Z, s)* wird von einem Cartier–Divisor D repräsentiert, *falls*

(1) $|D| \subseteq Z$ gilt.
(2) Ein Isomorphismus $\sigma : \mathscr{O}_X(D) \to L$ existiert, der auf $X - Z$ den Schnitt s_D in s überführt.

Proposition 0.28. *Es sei X eine Varietät und (L, Z, s) ein Pseudodivisor auf X. Dann wird (L, Z, s) durch einen Cartier–Divisor $D \in \operatorname{CaDiv} X$ repräsentiert.*
Es gilt

(1) Ist $Z \neq X$, so ist D als Element von $\operatorname{CaDiv} X$ eindeutig bestimmt.
(2) Ist $Z = X$, so ist D als Element von $\operatorname{CaCl} X$, also als Divisorenklasse eindeutig bestimmt.

Die folgende Definition ist von zentraler Bedeutung, da durch sie später für eine k–Untervarietät $j : V \subseteq X$ eines beliebigen Schemas X und einen Pseudodivisor D auf X, der Schnitt $D \cdot [V] = [j^* D] \in A_{k-1}(|D| \cap V)$ eingeführt werden wird.

Definition 0.25. *Es sei D ein Pseudodivisor auf einer n–dimensionalen Varietät X mit Support $Z = |D|$.*
Dann definiert man die zugehörige Weildivisorenklasse

$$[D] \in A_{n-1}(|D|) \tag{65}$$

wie folgt:
Es sei $\tilde{D}$ ein Cartierdivisor auf X, der D repräsentiert.

(1) Ist $Z \neq X$, so ist $\tilde{D}$ als Element von $\operatorname{CaDiv} X$ eindeutig bestimmt. Wir setzen dann

$$[D] = [\tilde{D}] \tag{66}$$

Dabei ist $[\tilde{D}]$ der zu $\tilde{D}$ assoziierte Weildivisor aufgefaßt als Zykel in $Z_{n-1}(|\tilde{D}|)$, also

$$[\tilde{D}] = \sum_V \operatorname{ord}_V(\tilde{D})[V] \in Z_{n-1}(|\tilde{D}|) = A_{n-1}(|\tilde{D}|)$$

wobei über die irreduziblen Komponenten V von $|\tilde{D}|$ summiert wird.
Da $|\tilde{D}| \subseteq |D| = Z$ erhalten wir ein Bild in $Z_{n-1}(|D|) = A_{n-1}(|D|)$

(2) Ist $Z = X$, so ist $\tilde{D}$ als Element von $\operatorname{CaCl} X$ eindeutig bestimmt, also für einen repräsentierenden Divisor $\tilde{D}$ ist $[\tilde{D}] \in Z_{n-1}(X)$ bis auf Elemente von $\operatorname{Rat}_{n-1}(X)$ eindeutig bestimmt. Damit ist $[\tilde{D}]$ in $A_{n-1}(X) = A_{n-1}(|D|)$ eindeutig festgelegt.

Definition 0.26. *Es seien $D = (L, Z, s)$ und $D' = (L', Z', s')$ zwei Pseudodivisoren auf einem Schema X.*
Dann sei

$$D + D' = (L \otimes_{\mathscr{O}_X} L', Z \cup Z', s \otimes s') \tag{67}$$

$$-D = (L^{-1}, Z, s^{-1}) \tag{68}$$

Proposition 0.29. *Für ein festes $Z \subseteq X$ bilden die Pseudodivisoren D mit $\operatorname{supp} D = Z$ eine abelsche Gruppe.*

Definition 0.27. *Es sei $f : X' \to X$ ein Schemamorphismus und $D = (L, Z, s)$ ein Pseudodivisor auf X. Dann ist $f^* D = (f^* L, f^{-1}(Z), f^*(s))$ der* pull–back von D auf X'.

Proposition 0.30. *Für $g : X'' \to X'$ und $f : X' \to X$ sowie einen Pseudodivisor D auf X gilt*

$$g^* f^*(D) = (f \circ g)^*(D) \tag{69}$$

Weiterhin gilt für Pseudodivisoren D, D' auf X, daß

$$f^*(D + D') = f^* D + f^* D' \tag{70}$$

mit der oben eingeführten Addition von Pseudodivisoren.

Schnitte mit Divisoren

Definition 0.28. *Es sei D ein Pseudodivisor auf einem Schema X und V eine k–dimensionale Untervarietät von X mit Einbettung $j : V \to X$. Dann ist j^*D ein Pseudodivisor auf V mit $|j^*D| = V \cap |D|$.*
Dann sei

$$D \cdot [V] = D \cdot V = [j^* D] \in A_{k-1}(V \cap |D|) \tag{71}$$

Bemerkung 0.7. *Ist D ein Cartier–Divisor auf X, so kann man $D \cdot [V]$ auch folgendermaßen konstruieren: Ist $|D| \not\supseteq V$, so ist j^*D ein Cartierdivisor auf V. Man bilde den zu j^*D assoziierten Weildivisor in $Z_{k-1}(|D| \cap V)$ und nenne sein Bild in $A_{k-1}(|D| \cap V)$ dann $D \cdot [V]$.*
Ist $|D| \supseteq V$, so wähle einen Cartier–Divisor C auf V, so daß $\mathcal{O}_V(C) \cong j^* \mathcal{O}_X(D)$ ist. Dann sei $D \cdot [V]$ das Bild des zu C assoziierten Weildivisors $[C]$ aus $Z_{k-1}(V)$ in $A_{k-1}(V)$. Der Divisor C ist nur bis auf einen Hauptdivisor bestimmt, aber sein Bild in $A_{k-1}(V)$ ist eindeutig.

Bemerkung 0.8. *Wir nennen $D \cdot [V]$ auch das Bild von $D \cdot [V]$ in jedem $A_{k-1}(Y)$ für jedes abgeschlossene Unterschema $Y \subseteq X$ mit $V \cap |D| \subseteq Y$.*

Bemerkung 0.9. *Ist für ein Schema X das Linienbündel $\mathcal{O}_X(D)$ auf $|D|$ trivial, so kann man sogar eine Abbildung $Z_k(X) \to Z_{k-1}(|D|)$ konstruieren. Man setze für $j : V \to X$ dann $D \cdot V = [j^*D]$ falls $V \not\subseteq |D|$ und $D \cdot V = 0$, falls $V \subseteq |D|$. Im letzteren Fall würde die explizite Konstruktion von oben die Wahl eines Cartier–Divisors C auf V verlangen, für den $\mathcal{O}_V(C) = j^* \mathcal{O}_X(D)$ ist. Da $j^* \mathcal{O}_X(D)$ wegen $j(V) \subseteq |D|$ und der Annahme vom Anfang trivial ist, muß auch $\mathcal{O}_V(C) = \mathcal{O}_V$ sein. Es ist dann sinnvoll $D \cdot V = 0$ zu setzen.*
Der Fall $\mathcal{O}_X(D)$ auf $|D|$ trivial tritt zum Beispiel für (global) prinzipale Cartierdivisoren D auf, diese werden unter der kanonische Abbildung $\mathrm{CaDiv}\, X \to \mathrm{Pic}\, X$ *auf die Isomorphieklasse des trivialen Bündels $\mathcal{O}_X$ abgebildet.*

Definition 0.29. *Es sei $\alpha = \sum_V n_V\, V \in Z_k(X)$ ein algebraischer Zykel im Schema X. Dann ist $|\alpha| = \bigcup_{n_V \neq 0} V$, der* Support von α.

Definition 0.30. *Ist $\alpha = \sum_V n_V\, V \in Z_k(X)$ ein algebraischer Zykel, so definieren wir*

$$D \cdot \alpha = \sum_V n_V\, (D \cdot [V]) \in A_{k-1}(|D| \cap |\alpha|) \tag{72}$$

Bemerkung 0.10. *Für jedes abgeschlossene Unterschema $Y \subseteq X$ mit $|D| \cap |\alpha| \subseteq Y \subseteq X$ sei $D \cdot \alpha$ auch das Bild von $D \cdot \alpha \in A_{k-1}(|D| \cap |\alpha|)$ unter $A_{k-1}(|D| \cap |\alpha|) \to A_{k-1}(Y)$.*

Proposition 0.31.

a) Es sei D ein Pseudodivisor auf X und $\alpha, \alpha' \in Z_k(X)$. Dann ist

$$D \cdot (\alpha + \alpha') = D \cdot \alpha + D \cdot \alpha' \tag{73}$$

in $A_{k-1}(|D| \cap (|\alpha| \cup |\alpha'|))$.

b) Es seien D, D' Pseudodivisoren auf X und $\alpha \in Z_k(X)$. Dann ist

$$(D + D') \cdot \alpha = D \cdot \alpha + D' \cdot \alpha \tag{74}$$

in $A_{k-1}((|D| \cup |D'|) \cap |\alpha|)$

c) Es sei D ein Pseudodivisor auf X und $f : X' \to X$ ein eigentlicher Schemamorphismus, $\alpha \in Z_k(X')$ und

$$g : f^{-1}(|D|) \cap |\alpha| \to |D| \cap f(|\alpha|).$$

Dann ist

$$g_*(f^* D \cdot \alpha) = D \cdot f_* \alpha \tag{75}$$

in $A_{k-1}(|D| \cap f(|\alpha|))$.

d) Es sei D ein Pseudodivisor auf X und $f : X' \to X$ ein flacher Schemamorphismus mit Relativdimension n. Weiter sei $\alpha \in Z_k(X)$ und

$$g : f^{-1}(|D| \cap |\alpha|) \to |D| \cap |\alpha|.$$

Dann ist:

$$f^*(D) \cdot f^* \alpha = g^*(D \cdot \alpha) \tag{76}$$

in $A_{k+n-1}(f^{-1}(|D|) \cap |\alpha|))$.

e) Ist D ein Pseudodivisor auf X mit trivialem Linienbündel L_D auf X und $\alpha \in Z_k(X)$, dann ist

$$D \cdot \alpha = 0 \tag{77}$$

in $A_{k-1}(|\alpha|)$.

Wir betrachten für die beiden folgenden Lemmata cartesische Quadrate

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "j'"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & Y' \arrow[l, "j"] \end{tikzcd} \tag{78}$$

mit offenen Immersionen j, j'.

Lemma 0.13. *Es sei $f : X \to Y$ eine eigentliche Abbildung und es existiere ein überdeckendes System von cartesischen Quadraten wie oben. Weiter sei für jedes von diesen und für jedes D, Pseudodivisor auf Y' und $\alpha \in Z_k(X')$:*

$$f'_*(f'^* D \cdot \alpha) = D \cdot f'_* \alpha \tag{79}$$

Dann gilt die Aussage c) der vorigen Proposition für $f : X \to Y$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} j^*(f_*(f^* D \cdot \alpha)) &= f'_* j'^*(f^* D \cdot \alpha) = f'_*(j'^* f^* D \cdot j'^* \alpha) = \\ &= f'_*(f'^* j^* D \cdot j'^* \alpha) = j^* D \cdot f'_* j'^* \alpha = j^* D \cdot j^* f_* \alpha = j^*(D \cdot f_* \alpha) \end{aligned}$$

Da die $f' : X' \to Y'$ eine Überdeckung von $f : X \to Y$ darstellen, gilt die Aussage c) für f unter der Annahme, daß sie für alle f' glt.

Lemma 0.14. *Es sei $f : X \to Y$ eine flache Abbildung mit Relativdimension n und es existiere ein überdeckendes System von cartesischen Quadraten wie oben. Weiter sei für jedes von diesen und für jedes D, Pseudodivisor auf Y' und $\alpha \in Z_k(Y')$:*

$$f'^* D \cdot f'^* \alpha = f'^*(D \cdot \alpha) \tag{80}$$

Dann gilt die Aussage d) der vorigen Proposition für $f : X \to Y$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} j'^*(f^* D \cdot f^* \alpha) &= j'^* f^* D \cdot j'^* f^* \alpha = f'^* j^* D \cdot f'^* j^* \alpha = \\ &= f'^*(j^* D \cdot j^* \alpha) = f'^* j^*(D \cdot \alpha) = j'^* f^*(D \cdot \alpha) \end{aligned}$$

Da die $f' : X' \to Y'$ eine Überdeckung von $f : X \to Y$ darstellen, gilt die Aussage d), falls sie für alle f' gilt.

Lemma 0.15. *Es sei $f : X \to Y$ ein flacher Morphismus mit Relativdimension n. Weiter sei D ein effektiver Cartierdivisor auf Y. Dann ist*

$$[f^* D] = [f^{-1}(D)] = f^*[D] \tag{81}$$

Beweis. Man habe das Quadrat

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & U \arrow[l, "j'"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & V \arrow[l, "j"] \end{tikzcd}$$

mit $V = \mathrm{Spec}(A)$ und $U = \mathrm{Spec}(B)$, offen. Es sei D auf V gegeben als (a) mit einem Nichtnullteiler $a \in A$. Dann ist auch $f^* D|_U = (a)$ mit a aufgefaßt als Element von B. Wegen $0 \to A \xrightarrow{a} A$ und der exakten Tensorierung $- \otimes_A B$ ist a auch in B Nichtnullteiler. Es ist also

$$[f'^* D] = [\mathrm{Spec}(B/aB)] = [\mathrm{Spec}(B \otimes A/a)] = [f'^{-1} D] = f'^*[D]$$

Man nehme nun im folgenden an, daß die Aussage des Lemmas für f eine offene Inklusion schon richtig sei.
Damit ist dann

$$\begin{aligned} j'^*[f^* D] = [j'^* f^* D] = [f'^* j^* D] = f'^*[j^* D] = f'^*[j^{-1} D] = f'^* j^*[D] = \\ = j'^* f^*[D] = j'^*[f^{-1} D] \end{aligned}$$

Da U, V allgemein gewählt waren, folgt $[f^* D] = [f^{-1} D] = f^*[D]$.

Lemma 0.16. *Es sei $f : X \to V$ ein flacher Morphismus mit Relativdimension n und V eine Varietät. Weiter sei D ein effektiver Cartierdivisor auf V und es sei*

$$[X] = \sum_i l_i [X_i]$$

die Zerlegung in irreduzible Komponenten, notwendig gleicher Dimension $\dim V + n$. *Dann ist*

$$f^* D \cdot f^*[V] = [f^* D] = [f^{-1} D] = f^*[D] = f^*(D \cdot [V]) \tag{82}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} f^* D \cdot f^*[V] = f^* D \cdot [X] = f^* D \cdot (\sum_i l_i [X_i]) = \\ = \sum_i l_i (f^* D \cdot [X_i]) = \sum_i l_i [f^* D \cap X_i] = \\ = [f^* D \cap X] = [f^* D] = [f^{-1}(D)] = f^*[D] = f^*(D \cdot [V]) \end{aligned}$$

Nun schließlich zum Beweis von d):
Beweis. Man habe im allgemeinen Fall das cartesische Quadrat

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & f^{-1}(V) \arrow[l, "j'"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & V \arrow[l, "j"] \end{tikzcd}$$

wobei man durch weitere Lokalisierung und Ausnutzen der Additivität in D annehmen kann, daß D auf Y ein effektiver Cartierdivisor ist. Dann gilt mit $\tilde{D} = j^* D$:

$$\begin{aligned} f^*(D) \cdot f^*[V] = f^*(D) \cdot f^* j_*[V] = f^*(D) \cdot j'_* f'^*[V] = \\ = j'_*(j'^* f^*(D) \cdot f'^*[V]) = j'_*(f'^* j^*(D) \cdot f'^*[V]) = \\ = j'_*(f'^* \tilde{D} \cdot f'^*[V]) = j'_* f'^*(\tilde{D} \cdot [V]) = \\ = f^* j_*(j^* D \cdot [V]) = f^*(D \cdot j_*[V]) = f^*(D \cdot [V]) \end{aligned}$$

Gerstenhaber-Algebra

Es sei A eine affine k-Algebra und $I \subseteq A$ ein Ideal.
Die Aufblasung von $A[T]$ in (T, I) ist

$$B = A[T, WT, WI] = A[T] \oplus (TA, I)W \oplus (T^2 A, TI, I^2)W^2 \oplus \cdots$$

Die Gerstenhaber-Algebra B° ist

$$B^\circ = B_{(WT)} = A[T, T^{-1} I] = \cdots \oplus T^d A \oplus \cdots \oplus TA \oplus A \oplus T^{-1} I \oplus T^{-2} I^2 \oplus \cdots$$

Es ist $B_0 = B/TB$ gleich

$$B/TB = A \oplus (TA + I)W \oplus (T^2 A + TI + I^2)W^2 \oplus \cdots$$

denn man hat (W^2-Term als Beispiel, links $A[T]$-, rechts A-Module):

$$(T^2 A, TI, I^2)/(T^3 A, T^2 I, TI^2) = (T^2 A + TI + I^2)$$

Also $B_0 = B/TB = S[T]$ mit

$$S = A \oplus I \oplus I^2 \oplus \cdots$$

Damit zerfällt $\mathrm{proj}(B/TB)$ in $\mathrm{proj}(S)$ und $\mathrm{Spec}(S)$.
Tensoriert man weiter mit $- \otimes_A A/I$, so entsteht

$$B'_0 = A/I \oplus (TA/I + I/I^2)W \oplus (T^2 A/I + TI/I^2 + I^2/I^3)W^2 \oplus \cdots$$

Dieses $B'_0 = S'[T]$ zerfällt in $\mathrm{proj}(S')$ und $\mathrm{Spec}(S') = C_I A$, den *Normalkegel von A über I*.

$$S' = A/I \oplus I/I^2 \oplus I^2/I^3 \oplus \cdots$$

Der Ring S' ist zugleich auch B°/TB° also die Faser von B° über $T=0$. Die übrigen Fasern ergeben sich durch $B^\circ[T^{-1}]=A[T,T^{-1}]$ als A.