MORPHISMEN

Grundeigenschaften von Morphismen

(1) Eine abgeschlossene Immersion hat $\mathscr{P}$.
(2) Wenn $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ die Eigenschaft $\mathscr{P}$ haben, dann auch $g \circ f$.
(3) Wenn $f: X \to Y$ die Eigenschaft $\mathscr{P}$ hat, dann hat auch $f': X \times_Y Y' \to Y'$ für jedes $Y' \to Y$ die Eigenschaft $\mathscr{P}$.
(4) Wenn für S-Schemata X, Y, X', Y' die Morphismen $f: X \to Y$ und $g: X' \to Y'$ die Eigenschaft $\mathscr{P}$ haben, dann auch $f \times g: X \times_S X' \to Y \times_S Y'$.
(5) Ein Morphismus $f: X \to Y$ hat genau dann die Eigenschaft $\mathscr{P}$, wenn $f_{\mathrm{red}}: X_{\mathrm{red}} \to Y_{\mathrm{red}}$ sie hat.
(6) Wenn für $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ die Abbildung $g \circ f$ die Eigenschaft $\mathscr{P}$ hat, und g separariert ist, so hat auch f die Eigenschaft $\mathscr{P}$.

Sprechweisen: Bedingung 2. heißt *„abgeschlossen unter Komposition"*. Bedingung 3. heißt *„abgeschlossen unter Basiserweiterung"*.
Erfüllt $\mathscr{P}$ die Bedingungen 1., 2. und 3. so erfüllt sie auch die übrigen.

Immersionen

Morphismen vom endlichen Typ

Ein Morphismus $f: X \to Y$ heißt *lokal vom endlichen Typ*, wenn es für jedes $y = f(x)$ und jedes affine $V = \operatorname{Spec}(A) \subseteq Y$ mit $y \in V$ sowie jedes affine $U = \operatorname{Spec}(B) \subseteq f^{-1}(V)$ mit $x \in U$, immer $B = A[b_1, \ldots, b_s]$ eine endlich erzeugte A-Algebra ist.

Lemma 0.1. *Es sei B eine A-Algebra und für eine endliche Überdeckung $D(f_i) \subseteq \operatorname{Spec}(B)$ immer $B_{f_i} = A[b_{ij}/1]$ eine endlich erzeugte A-Algebra.*
Dann ist auch B eine endlich erzeugte A-Algebra.

Beweis. Es sei $\sum b_i f_i = 1$. Dann ist $B = A[b_{ij}, b_i, f_i]$.
Daraus folgt: Die Eigenschaft „vom endlichen Typ"ist lokal in X und lokal in Y.

Proposition 0.1. *Morphismen vom endlichen Typ sind* abgeschlossen unter Komposition und Basiserweiterung.

Affine und endliche Morphismen

Ein Morphismus $f: X \to Y$ heißt *affin*, wenn für jedes $V = \operatorname{Spec}(A) \subseteq Y$, offen und affin auch $U = f^1(V) = \operatorname{Spec}(B) \subseteq X$ affin ist. Ist auch immer B ein endlicher A-Modul, so ist f *endlich*. Ist B immer ganz über A, so heißt f *ganz*.

Proposition 0.2. *Endliche und affine Morphismen sind* abgeschlossen unter Komposition und Basiserweiterung.

Separierte Morphismen

Eigentliche Morphismen

Projektive Morphismen

Flache Morphismen

Topologische Eigenschaften Die folgende Proposition ist grundlegend, aus ihr folgen letztlich alle weiter unten stehenden:

Proposition 0.3. *Es sei $f: X \to Y$ ein flacher Schemamorphismus mit $f(x) = y$ und $y' \rightsquigarrow y$ eine Generisierung von y.*
Dann existiert ein $x' \rightsquigarrow x$, eine Generisierung von x mit $f(x') = y'$.

Proposition 0.4. *Es seien $f: X \to Y$ ein flacher Schemamorphismus. Weiter sei $Y' \subseteq Y$ eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge von Y.*
Ist dann X' eine irreduzible Komponente von $f^{-1}(Y')$, so dominiert X' unter f die Teilmenge Y', es gilt also für den Abschluß $\overline{f(X')} = Y'$.

Proposition 0.5. *Es sei $f: X \to Y$ ein flacher Schemamorphismus und $Z \subseteq Z'$ zwei abgeschlossene irreduzible Teilmengen von Y. Weiter sei T eine irreduzible Komponente von $f^{-1}(Z)$.*
Dann gibt es eine irreduzible Komponente T' von $f^{-1}(Z')$ mit $T \subseteq T'$.

Proposition 0.6. *Es sei $f: X \to Y$ ein flacher Schemamorphismus und $T \subseteq X$ eine irreduzible Komponente.*
Dann ist $\overline{f(T)}$ eine irreduzible Komponente von Y.

Proposition 0.7. *Es sei $f: X \to Y$ ein flacher Schemamorphismus und Y irreduzibel. Weiter sei y der generische Punkt von Y und die Faser $f^{-1}(y)$ irreduzibel.*
Dann ist auch X irreduzibel.

Proposition 0.8. *Es sei*

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l] \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[from=u, "f"'] & Y' \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd}$$

ein cartesisches Quadrat.
Ist dann g flach und f quasi-kompakt und dominant, so ist f' dominant.

Proposition 0.9. *Es sei wieder*

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l] \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[from=u, "f"'] & Y' \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd}$$

ein cartesisches Quadrat.
Weiter sei g flach und es dominiere jede irreduzible Komponente von X eine irreduzible Komponente von Y via f.
Dann dominiert jede irreduzible Komponente von X' eine irreduzible Komponente von Y' via f'.

Proposition 0.10. *Es sei $f: X \to Y$ ein flacher Schemamorphismus und $Z \subseteq Y$ mit $Z = g(Y')$ für einen quasikompakten Morphismus $g: Y' \to Y$.*
Dann ist

$$f^{-1}(\overline{Z}) = \overline{f^{-1}(Z)}.$$

Proposition 0.11. *Es sei $f: X \to Y$ treuflach und quasikompakt.*
Dann ist die Topologie von Y die Quotiententopologie der Topologie von X mit der durch f definierten Äquivalenzrelation.

Theorem 0.1. *Es sei Y ein noethersches Schema und es sei $f: X \to Y$ ein flacher Morphismus, lokal vom endlichen Typ.*
Dann ist f universell offen.

Eigenschaften von $X \Rightarrow$ Eigenschaften von Y

Proposition 0.12. *Es sei $f: X \to Y$ ein treuflacher Morphismus. Dann gilt*

1. *Wenn X lokal noethersch ist, so ist Y lokal noethersch.*
2. *Wenn X reduziert ist, so ist Y reduziert.*
3. *Wenn X in jedem Punkt integer ist, so ist Y integer in jedem Punkt.*
4. *Wenn X normal ist, so ist Y normal.*
5. *Wenn X regulär ist, so ist Y regulär.*

Eigenschaften von Y und Eigenschaften der $X_y \Rightarrow$ Eigenschaften von X Es seien im folgenden X und Y lokal noethersch. Dann gilt

Proposition 0.13. *Für jeden Morphismus $f: X \to Y$ gilt*

$$\dim \mathscr{O}_{X,x} \leqslant \dim \mathscr{O}_{Y,y} + \dim \mathscr{O}_{X_y,x}$$

Ist f flach, so gilt sogar

Proposition 0.14. *Es sei $f: X \to Y$ ein flacher Morphismus.*

$$\dim \mathscr{O}_{X,x} = \dim \mathscr{O}_{Y,y} + \dim \mathscr{O}_{X_y,x}$$

Weiter gilt

Proposition 0.15. *Es sei $f: X \to Y$ ein flacher Morphismus und $f(x) = y$.*
Es sei E eine Eigenschaft eines lokalen Rings eines Schemas. Für sie gelte: Wenn Y sie in y und X_y in x besitzt, so besitzt sie X auch in x.
Eine solche Eigenschaft ist:

1. *Der lokale Ring ist reduziert.*
2. *Der lokale Ring ist normal.*
3. *Der lokale Ring ist regulär.*

Eigenschaften von $f_s \Rightarrow$ Eigenschaften von f Es seien $g: X \to S$ und $h: Y \to S$ zwei S-Schemata und $f: X \to Y$ ein S-Morphismus. Dann induziert f für jedes $s \in S$ einen Morphismus

$$f_s: g^{-1}(s) \to h^{-1}(s).$$

Es gilt dann

Proposition 0.16. *Sind X und Y lokal noethersch und g, h flach und vom endlichen Typ sowie alle f_s flach, so ist f flach.*

Aufstieg und Abstieg

Es sei

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "g'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y' \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

ein cartesisches Quadrat also $X' \cong X \times_Y Y'$.

Definition 0.1. *Für eine Eigenschaft $\mathscr{E}$ eines Morphismus betrachtet man folgende Fälle:*

(1) Wenn f die Eigenschaft $\mathscr{E}$ hat, so hat auch f' diese Eigenschaft. Man sagt: Die Eigenschaft $\mathscr{E}$ steigt auf.
(2) Wenn f' die Eigenschaft $\mathscr{E}$ hat, so hat auch f diese Eigenschaft. Man sagt: Die Eigenschaft $\mathscr{E}$ steigt ab.

Proposition 0.17. *Folgende Eigenschaften eines Morphismus steigen auf: Der Morphismus f ist*

(1) surjektiv
(2) abgeschlossene oder offene Immersion
(3) (Endlichkeitsbedingungen)
   1. *quasikompakt*
   2. *lokal vom endlichen Typ*
   3. *lokal von endlicher Präsentation*
   4. *endlich*

(4) separiert
(5) affin
(6) eigentlich
(7) projektiv
(8) quasi-projektiv

Proposition 0.18. *Folgende Eigenschaften eines Morphismus steigen nicht auf: Der Morphismus f ist*

(1) injektiv
(2) dominant
(3) (topologische Eigenschaften)
   1. *offen*
   2. *abgeschlossen*
   3. *Homöomorphismus*
   4. *bistetig auf sein Bild*

Treuflacher Abstieg

Es sei

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \\ S & S' \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

ein kartesisches Quadrat.

Wir nehmen jetzt an, daß g treuflach und quasikompakt ist (fpqc).
Wenn aus dem Vorliegen einer Eigenschaft E für f' in dieser Situation immer folgt, daß auch f sie besitzt, so sagen wir: „E steigt ab".

Proposition 0.19. *Folgende Eigenschaften E steigen ab: f' ist*

1. *Surjektiv*
2. *Radiziell*
3. *Offen*
4. *Abgeschlossen*
5. *Universell offen*
6. *Universell abgeschlossen*
7. *Universell bistetig*
8. *Universeller Homöomorphismus*
9. *Quasikompakt*
10. *Quasikompakt und dominant*
11. *Separiert*
12. *Lokal vom endlichen Typ*
13. *Lokal von endlicher Darstellung*
14. *Vom endlichen Typ*
15. *Eigentlich*
16. *Isomorphismus*
17. *Offene Immersion*
18. *Abgeschlossene Immersion*
19. *Affin*
20. *Endlich*
21. *Quasi-endlich*
22. *Flach*
23. *Glatt*
24. *Etale*

Proposition 0.20. *Folgende Eigenschaften von f' steigen* nicht *ab: f' ist*

1. *Projektiv*
2. *Quasiprojektiv*
3. *Lokale Immersion*